

TESI DI DOTTORATO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRONICA
E DELLE TELECOMUNICAZIONI

DOTTORATO DI RICERCA IN
INGEGNERIA ELETTRONICA E DELLE TELECOMUNICAZIONI

STIMA DI PARAMETRI DEI CANALI
DOPPLER:
UN APPROCCIO CICLOSTAZIONARIO

Valentina De Angelis

Il Coordinatore del Corso di Dottorato Il Tutore

Ch.mo Prof. Giovanni POGGI

Ch.mo Prof. Luciano IZZO

Anno accademico 2004-2005

Ringraziamenti

Alla fine di questo triennio volevo ringraziare il Prof. Luciano Izzo ed il Prof. Antonio Napolitano per l'aiuto e la disponibilità e per l'attento lavoro di revisione di questo manoscritto, la mia famiglia e Patrizio per l'affetto costante. Un particolare ringraziamento ai miei amici e colleghi del DIET in particolare a Fabio per la sua grande gentilezza.

Indice

Elenco delle figure	viii
Introduzione	1
1 Effetto Doppler	5
2 Segnali Ciclostazionari	11
2.1 Serie temporali	12
2.2 Ciclostazionarietà del secondo ordine	14
2.2.1 Serie temporali a tempo discreto	15
2.3 Segnali complessi	17
2.4 Trasformazioni lineari quasi periodicamente tempo varianti	18
2.4.1 Relazioni ingresso-uscita in termini di statistiche cicliche	19
2.5 Prodotto di segnali ciclostazionari	21
2.6 Campionamento e aliasing	22
2.7 Stimatori	23
2.7.1 Stime della funzione di Autocorrelazione Ciclica e dello Spettro Ciclico	24
2.8 Esempi di segnali ciclostazionari	25
2.8.1 Segnale modulato in ampiezza	26
2.8.2 Segnale PAM	26
2.9 Statistiche di ordine superiore	32
2.9.1 Statistiche cicliche di ordine superiore per segnali a tempo continuo	32
2.9.2 Statistiche cicliche di ordine superiore per segnali a tempo discreto	35

3	Segnali quasi ciclostazionari generalizzati	37
3.1	Caratterizzazione statistica del secondo ordine	38
3.2	Caratterizzazione statistica di ordine superiore	39
3.2.1	Caratterizzazione spettrale	43
3.2.2	Cumulanti ciclici generalizzati: parametri tempo- rali e spettrali	44
3.3	Stimatori delle statistiche cicliche generalizzate	47
3.4	Esempi di segnali GACS	48
3.4.1	Segnale chirp	48
3.4.2	Segnale campionato non uniformemente	50
3.5	Trasformazioni lineari tempo varianti dei segnali GACS .	51
3.5.1	Sistemi FOT deterministici e aleatori	51
3.5.2	Decomposizione della risposta impulsiva di un sistema LTV FOT aleatorio	55
3.5.3	Caratterizzazione di ordine superiore dei sistemi LTV nel dominio del tempo e della frequenza . . .	58
3.5.4	Numerabilità dell'insieme delle frequenze di ciclo .	61
3.5.5	Filtraggio LPTV	64
3.5.6	Modulazione a prodotto	65
3.5.7	Canali Multipath Doppler	67
3.6	Campionamento dei segnali GACS	70
4	Prestazioni asintotiche di un nuovo algoritmo di sincronizzazione	77
4.1	Algoritmo di stima	79
4.2	Analisi delle prestazioni asintotiche dello stimatore CCAP CFO	84
4.3	Risultati delle simulazioni	88
4.4	Appendice A: Risultati su $\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)$	88
4.5	Appendice B: Risultati su $D_N(\xi)$	93
4.6	Appendice C	93
5	Algoritmo di sincronizzazione per segnali wide-band	95
5.1	Introduzione del modello a banda larga	95
5.2	Modello del segnale ricevuto	98
5.3	Risultati delle simulazioni	102

6	Algoritmo di sincronizzazione per segnali wide-band circolari	105
6.1	Algoritmo di stima	106
6.2	Realizzazione del metodo proposto	109
6.3	Algoritmo a complessità ridotta	112
6.4	Simulazioni numeriche	112
7	Conclusioni e sviluppi futuri	115
	Bibliografia	119

Elenco delle figure

2.1	Ampiezza della funzione di autocorrelazione ciclica $R_x^\alpha(\tau)$ come funzione di α e τ del segnale (2.77).	27
2.2	Ampiezza dello spettro ciclico $S_x^\alpha(f)$ come funzione di α e f del segnale (2.77).	28
2.3	Ampiezza della funzione di autocorrelazione ciclica $R_x^\alpha(\tau)$ come funzione di α e τ del segnale PAM (2.82) con una sequenza $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stazionaria e l'impulso $q(t)$ rettangolare.	30
2.4	Ampiezza dello spettro ciclico $S_x^\alpha(f)$ come funzione di α e f del segnale PAM (2.82) con una sequenza $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stazionaria e l'impulso $q(t)$ rettangolare.	31
4.1	Deviazione standard degli stimatori con $\beta_K = 1/Q$: * metodo CCAN, \diamond metodo CCAP, \circ valore asintotico teorico	89
4.2	Deviazione standard degli stimatori con $\beta_K = 0$: * metodo CCAN, \diamond metodo CCAP, \circ valore asintotico teorico	90
4.3	RMSE dello stimatore CFO con $\beta_K = 1/Q$, $N_s = 2^{12}$: * metodo CCAN, \diamond metodo CCAP	91
4.4	RMSE dello stimatore CFO con $\beta_K = 0$, $N_s = 2^{10}$: * metodo CCAN, \diamond metodo CCAP	92
5.1	RMSE per la stima del fattore di scala s , dello shift in frequenza ν , dell'ampiezza A , del ritardo d e dello shift di fase φ , normalizzati a $ s $, $1/T_b$, A , T_b e 2π , rispettivamente, in funzione del numero di bit N_b	104
6.1	Funzione di costo	113

- 6.2 RMSE per la stima del fattore di scala s , dello shift in frequenza ν , dell'ampiezza A , del ritardo d e dello shift di fase φ , normalizzati a $|s|$, $1/T_b$, A , T_b e 2π , rispettivamente, in funzione del numero di bit N_b 114

Introduzione

La demodulazione in un sistema digitale di telecomunicazione richiede la conoscenza di alcuni parametri del segnale ricevuto, quali il periodo di simbolo, l'*offset* di frequenza, lo *shift* di fase e, in molte applicazioni in cui è richiesto il controllo di potenza, l'ampiezza del segnale ricevuto. Tali parametri devono essere accuratamente stimati per evitare severe degradazioni delle prestazioni dei sistemi. In letteratura sono stati proposti sia algoritmi detti *data-aided*, che recuperano i parametri di sincronizzazione inviando una sequenza nota al ricevitore (fanno quindi un uso non efficiente delle risorse), che algoritmi detti *blind* che utilizzano informazioni legate alle statistiche del segnale. Molti algoritmi blind (o non data-aided) [3], [14], [25], [26], [27], [28], [29], utilizzano le proprietà di ciclostazionarietà presentate dalla maggioranza dei segnali modulati. I segnali ciclostazionari [9] hanno funzioni statistiche, quali la funzione di autocorrelazione, i momenti e i cumulanti, che sono funzioni quasi periodiche del tempo. Le frequenze delle espansioni in serie di Fourier di tali funzioni quasi periodiche sono chiamate frequenze di ciclo e sono legate a parametri come la frequenza della portante e il tasso di simbolo. Ricercando le frequenze di ciclo del segnale ricevuto è possibile stimare i parametri utili per la sincronizzazione.

In un canale di comunicazione in cui ricevitore e trasmettitore sono in moto fra loro, nel segnale ricevuto non è presente soltanto lo shift delle frequenze ma anche un fenomeno di scalatura temporale. Tale fenomeno va portato in conto se il segnale ricevuto è a larga banda. In tal caso il canale di comunicazione si comporta come una trasformazione lineare-tempo-variante (LTV) [18], [19] riconducibile ad una trasformazione lineare quasi periodicamente tempo variante (LAPTV) se il fattore di scala ha valore unitario. In applicazioni sonar [38] il segnale riflesso da un oggetto in moto con velocità costante rispetto al ricevitore è modellato come un segnale a banda larga se il rapporto fra

la velocità dell'oggetto e quella di propagazione nel mezzo non è molto minore dell'unità. Per un canale di comunicazione il modello a banda larga diventa indispensabile se il prodotto della banda del segnale per la durata dell'intervallo di osservazione non è molto più piccolo del rapporto tra la velocità radiale e la velocità di propagazione nel mezzo. Le odierne tecniche di telecomunicazione richiedono una banda sempre maggiore per ottenere elevati bit rate e lunghi intervalli di osservazione per gli algoritmi di stima ed egualizzazione in presenza di forti segnali interferenti. Molti sono gli scenari in cui l'introduzione di un modello a larga banda si è rivelato di fondamentale importanza per modellare correttamente il fenomeno in esame. In [31] è raccontato come la mancata adozione di un modello a banda larga per il segnale ricevuto rischiasse di compromettere la sorte della missione spaziale delle sonde Cassini e Huygens. Nelle applicazioni radar e sonar, dove il segnale analizzato è di energia, se si utilizza il modello di segnale a larga banda i parametri del segnale sono stimati ricorrendo alla Wide-Ambiguity-Function (WAF) [21]; nelle telecomunicazioni i segnali ricevuti e trasmessi nelle applicazioni di sincronizzazione e stima sono modellati come ciclostazionari, quindi ad energia infinita, rendendo impossibile l'uso della WAF.

Se il moto tra ricevitore e trasmettitore è caratterizzato da un'accelerazione non nulla, il segnale ricevuto non è più ciclostazionario, ma ciclostazionario generalizzato [17], [18], [19], [20]. Le funzioni statistiche delle serie temporali ciclostazionarie generalizzate sono funzioni quasi periodiche del tempo i cui sviluppi in serie di Fourier sono caratterizzati da coefficienti e frequenze che sono funzioni dei vettori ritardo delle serie temporali e l'unione, effettuata su tutti i possibili vettori ritardo, delle frequenze dipendenti dal ritardo non è sempre un insieme numerabile. I segnali ciclostazionari rappresentano un caso particolare di segnali ciclostazionari generalizzati in quanto le frequenze dello sviluppo in serie di Fourier dei loro parametri statistici sono costanti. In molti problemi di stima un segnale può essere modellato come ciclostazionario o ciclostazionario generalizzato; infatti se l'intervallo di osservazione è incrementato per aumentare l'immunità agli effetti del rumore e dell'interferenza, può accadere che il modello ciclostazionario adottato per il segnale in ingresso non sia più valido e, quindi, sia più corretto adottare un modello ciclostazionario generalizzato.

La tesi è suddivisa in 7 capitoli. Nel **Capitolo 1** il modello per il segnale ricevuto a banda larga è stato ricavato come evoluzione dal

modello a banda stretta. Il **Capitolo 2** è dedicato alle proprietà dei segnali ciclostazionari. Nel **Capitolo 3** è descritta la classe dei segnali ciclostazionari generalizzati. Nel **Capitolo 4** sono descritte per via analitica e numerica le proprietà asintotiche di un algoritmo blind di stima dei parametri di sincronizzazione che adotta un modello a banda stretta per il segnale ricevuto. Nel **Capitolo 5** è presentato un algoritmo blind che utilizza le proprietà di ciclostazionarietà del secondo ordine per stimare i parametri di sincronizzazione del segnale ricevuto nelle ipotesi di segnale a larga banda. Un algoritmo blind per la stima dell'ampiezza delle fase, del Doppler shift e del fattore di scala per segnali circolari è presentato nel **Capitolo 6**. Nel **Capitolo 7**, infine, sono tracciate le linee guida di una estensione degli algoritmi analizzati nei capitoli precedenti al caso multi utente.

Capitolo 1

Effetto Doppler

Un canale di comunicazione è il mezzo fisico usato per collegare una sorgente di informazione (il trasmettitore) ed un utente (il ricevitore). Se $x(t)$ è il segnale trasmesso, esso è espresso da

$$x(t) = Re [\tilde{x}(t)e^{j\omega_0 t}] \quad (1.1)$$

dove $\tilde{x}(t)$ è l'involuppo complesso di $x(t)$. Nel caso di moto relativo tra trasmettitore e ricevitore, il segnale ricevuto è dato da [7],[38]

$$y(t) = Re [\tilde{x}(t - \tau(t))e^{j\omega_0(t - \tau(t))}] \quad (1.2)$$

Il termine $\tau(t)$ è noto in letteratura con l'espressione *range delay* ed è il ritardo tempo variante con cui un segnale trasmesso all'istante $t - \tau(t)$ raggiunge il ricevitore all'istante t . Nella (1.2) sono stati trascurati gli effetti selettivi in frequenza introdotti dal canale e l'espressione del segnale ricevuto dipende solo dalle ipotesi sul moto relativo tra ricevitore e trasmettitore.

Se il ricevitore e il trasmettitore sono entrambi fermi rispetto al sistema di riferimento, si avrà

$$\tau(t) = \tau_0 = \frac{R_0}{c} \quad (1.3)$$

con R_0 distanza tra ricevitore e trasmettitore e c velocità di propagazione nel mezzo. Il segnale ricevuto sarà allora

$$y(t) = Re [\tilde{x}(t - \tau_0)e^{j\omega_0(t - \tau_0)}] \quad (1.4)$$

Se ricevitore e trasmettitore si muovono lungo la stessa direzione, il ricevitore in moto con velocità v_x e il trasmettitore con velocità v_y , (rispetto ad un sistema di riferimento opportuno), le loro posizioni saranno descritte dalle seguenti equazioni [30]

$$X(t) = X_0 + v_x t, \quad (1.5)$$

$$Y(t) = Y_0 + v_y t \quad (1.6)$$

e la distanza è data da

$$R(t) = Y(t) - X(t) = (Y_0 - X_0) + (v_y - v_x)t = R_0 + (v_y - v_x)t. \quad (1.7)$$

Un segnale trasmesso all'istante $t - \tau(t)$ raggiunge il ricevitore all'istante t percorrendo una distanza pari a

$$c\tau(t) = R(t - \tau(t)) + v_y\tau(t) = R_0 + (v_y - v_x)(t - \tau(t)) + v_y\tau(t) \quad (1.8)$$

da cui deriva

$$\tau(t) = \frac{R_0}{c - v_x} + \frac{v_y - v_x}{c - v_x} t. \quad (1.9)$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.2) si ottiene

$$y(t) = Re \left\{ \tilde{x}[st - \tau(0)] e^{j\omega_0(st - \tau(0))} \right\} \quad (1.10)$$

dove

$$s \triangleq \frac{c - v_y}{c - v_x} = \frac{1 - v_y/c}{1 - v_x/c} \quad (1.11)$$

è detto fattore di scala. Se si assume che

$$v_x \ll c \quad (1.12)$$

e

$$v_y \ll c \quad (1.13)$$

allora per il fattore di scala s si ha

$$s = \frac{1 - v_y/c}{1 - v_x/c} \cong \left(1 - \frac{v_y}{c}\right) \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \cong 1 - \frac{v_y - v_x}{c} = 1 - \frac{v}{c} \quad (1.14)$$

dove

$$v \triangleq v_y - v_x. \quad (1.15)$$

In molte applicazioni il valore di s può essere assunto unitario e il ritardo massimo che si trascura per un segnale di durata T è [7],[38]

$$(1 - sT) \simeq \frac{v}{c}T. \quad (1.16)$$

Per un segnale di banda B l'involuppo complesso non cambia in maniera apprezzabile in un intervallo di durata $1/B$. Pertanto, l'errore espresso dalla (1.16) è trascurabile se

$$BT \ll \frac{c}{v}. \quad (1.17)$$

Se vale la (1.17) l'espressione del segnale ricevuto diventa

$$y(t) = Re \left\{ \tilde{x}(t - \tau_0) e^{j\omega_0 \left[\left(1 - \frac{v}{c}\right)t - \tau_0 \right]} \right\} \quad (1.18)$$

dove, nell'ipotesi (1.12), si è posto

$$\tau(0) \cong \tau_0. \quad (1.19)$$

Consideriamo l'espressione dell'esponente presente nella (1.18)

$$\omega_0 \left[\left(1 - \frac{v}{c}\right)t - \tau_0 \right]. \quad (1.20)$$

Definendo lo scostamento Doppler (*Doppler shift*)

$$\omega_d \triangleq \omega_0 \frac{v}{c} \quad (1.21)$$

la (1.20) diventa

$$(\omega_0 - \omega_d)t - \omega_0\tau_0. \quad (1.22)$$

Sostituendo la (1.22) nella (1.18) si ha

$$y(t) = Re \left\{ \tilde{x}(t - \tau_0) e^{j(\omega_0 - \omega_d)(t - \tau_0)} \right\}. \quad (1.23)$$

Molti algoritmi di sincronizzazione e di egualizzazione necessitano di intervalli di osservazione relativamente lunghi. Inoltre, applicazioni ad

elevati bit rate richiedono segnali a banda sempre più ampia; in queste ipotesi la condizione espressa dalla (1.17) non è soddisfatta e il segnale ricevuto presenta un fattore di scala a valore non unitario. Si utilizza in tal caso il modello a banda larga (*Wide-band*) per il segnale ricevuto:

$$y(t) = Re \left[\tilde{x}(st - \tau_0) e^{j(\omega_0 - \omega_d)(t - \tau_0)} \right]. \quad (1.24)$$

È possibile estendere il discorso sulla caratterizzazione di un canale Doppler introducendo la sua risposta impulsiva

$$h(t, u) \triangleq \delta(u - t + \tau(t)). \quad (1.25)$$

Lo sviluppo in serie di Taylor del termine $\tau(t)$ è [15]

$$\tau(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots \quad (1.26)$$

In molte applicazioni si può considerare lo sviluppo arrestato al secondo ordine. Nel caso di assenza di moto tra ricevitore e trasmettitore i termini d_0 , d_1 e d_2 si ricavano dalla (1.3) e sono

$$d_0 = R_0/c, \quad (1.27)$$

$$d_1 = d_2 = 0. \quad (1.28)$$

Se si ha velocità relativa costante v tra ricevitore e trasmettitore dalla (1.9) si ricavano

$$d_0 = \frac{R_0}{c}, \quad (1.29)$$

$$d_1 = \frac{v}{c}, \quad (1.30)$$

$$d_2 = 0. \quad (1.31)$$

Nel caso di ricevitore in moto rispetto al trasmettitore con accelerazione uniforme a e velocità iniziale v_0 si ha che la distanza che il segnale trasmesso all'istante $t - \tau(t)$ deve percorrere è

$$R(t) = R_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = c \tau(t) \quad (1.32)$$

da cui derivano i termini dello sviluppo in serie di $\tau(t)$

$$d_0 = \frac{R_0}{c}, \quad (1.33)$$

$$d_1 = \frac{v_0}{c} \quad (1.34)$$

e

$$d_2 = \frac{a}{2c}. \quad (1.35)$$

Capitolo 2

Segnali Ciclostazionari

I segnali ciclostazionari (*cyclostationary processes*) [9], [10] sono segnali che hanno parametri probabilistici, come la funzione di autocorrelazione, i momenti, i cumulanti, che sono funzioni periodiche del tempo. In natura molti fenomeni fisici, in cui sono presenti periodicità, sono all'origine di processi temporali per i quali il modello ciclostazionario può essere correttamente utilizzato. Ad esempio: nell'astronomia, le periodicità sono dovute ai moti di rivoluzione e rotazione dei pianeti; nelle comunicazioni, elaborazioni sui segnali, come la modulazione, il campionamento, la codifica e il multiplexing, danno luogo a serie temporali ciclostazionarie.

Nei prossimi paragrafi le proprietà statistiche dei segnali ciclostazionari saranno analizzate adottando un approccio *fraction-of-time* (FOT) [9], [12], alternativo a quello classico stocastico, in cui i segnali sono modellati come singole funzioni del tempo (serie temporali) e non come realizzazioni di un processo stocastico. Tale approccio è molto utile quando un insieme di realizzazioni non esiste e viene introdotto artificialmente. Nell'approccio FOT i parametri statistici sono definiti attraverso medie temporali su intervalli infiniti e non come medie d'insieme su processi stocastici. Partendo dalle serie temporali, nel prossimo paragrafo saranno introdotti concetti probabilistici classici operando nell'approccio FOT.

2.1 Serie temporali

L'approccio FOT si basa sulla decomposizione delle funzioni di una serie temporale nella sua componente quasi periodica (eventualmente nulla) e di un termine residuo; si avrà quindi

$$x(t) \triangleq x_{ap}(t) + x_r(t) \quad (2.1)$$

dove $x_{ap}(t)$ e $x_r(t)$ sono rispettivamente una funzione quasi periodica e un termine residuo privo di componenti sinusoidali additive

$$\langle x_r(t)e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t \equiv 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

L'operatore di estrazione della componente quasi periodica $E^{\{\alpha\}}\{x(t)\}$ è definito come l'operatore che estrae tutte le componenti additive sinusoidali presenti nel suo argomento

$$E^{\{\alpha\}}\{x(t)\} \triangleq x_{ap}(t). \quad (2.3)$$

Sia $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ una serie temporale tempo-continuo a valori reali, si assuma che l'insieme Γ_1 delle frequenze della componente quasi periodica della funzione $\mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi\}}$ sia numerabile per ogni valore di ξ , dove

$$\mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi\}} \triangleq \begin{cases} 1, & t : x(t) \leq \xi \\ 0, & t : x(t) > \xi \end{cases} \quad (2.4)$$

è la funzione indicatrice dell'insieme $\{t \in \mathbb{R} : x(t) \leq \xi\}$.

Si può dimostrare che la funzione di ξ

$$F_{x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi) \triangleq E^{\{\alpha\}}\{\mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi\}}\} \quad (2.5)$$

è una valida funzione di distribuzione cumulativa (esclusa la proprietà di continuità a destra). Infatti, assume valori nell'intervallo $[0, 1]$, è non decrescente e si ha

$$F_{x(t)}^{\{\alpha\}}(-\infty) = 0 \quad (2.6)$$

$$F_{x(t)}^{\{\alpha\}}(+\infty) = 1. \quad (2.7)$$

La sua derivata rispetto a ξ , $f_{x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi)$, è una valida funzione di densità di probabilità. Se $g(\cdot)$ è una funzione che soddisfa opportune proprietà di regolarità, si ha

$$E^{\{\alpha\}}\{g(x(t))\} = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) f_{x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

che rivela che l'operatore di estrazione della componente quasi periodica $E^{\{\alpha\}}$ è l'operatore di media rispetto alla distribuzione $F_{x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi)$ per le serie temporali $x(t)$. Per un segnale $x(t)$ quasi periodico si ha

$$E^{\{\alpha\}}\{x(t)\} \triangleq x(t) \quad (2.9)$$

cioè i segnali quasi periodici sono deterministici nell'approccio FOT.

La caratterizzazione del secondo ordine di un segnale $x(t)$ reale può essere ottenuta usando nuovamente l'operatore di estrazione della componente quasi periodica come operatore di media. Si assuma che l'insieme Γ_2 delle frequenze della componente quasi periodica della funzione $\mathbf{1}_{\{x(t+\tau) \leq \xi_1\}} \mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi_2\}}$ sia numerabile per ogni valore di ξ_1, ξ_2 e τ : allora la funzione di ξ_1, ξ_2

$$F_{x(t+\tau)x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi_1, \xi_2) \triangleq E^{\{\alpha\}}\{\mathbf{1}_{\{x(t+\tau) \leq \xi_1\}} \mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi_2\}}\} \quad (2.10)$$

è una valida funzione di distribuzione cumulativa congiunta del secondo ordine per ogni fissato t e τ (esclusa la proprietà di continuità a destra rispetto a ξ_1 e ξ_2). Inoltre, la derivata del secondo ordine della (2.10), rispetto a ξ_1 e ξ_2 , denotata da $f_{x(t+\tau)x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi_1, \xi_2)$, è una valida funzione di distribuzione di probabilità congiunta del secondo ordine.

Si può dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} R_x(t, \tau) &\triangleq E^{\{\alpha\}}\{x(t+\tau)x(t)\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \xi_1 \xi_2 f_{x(t+\tau)x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

è una valida funzione di autocorrelazione.

Generalizzando le (2.5), (2.10) è possibile una caratterizzazione statistica completa di ordine N considerando la funzione

$$\begin{aligned}
 & F_{x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_{N-1}), x(t)}^{\{\alpha\}}(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N) \\
 & \triangleq E^{\{\alpha\}} \left\{ \mathbf{1}_{\{x(t+\tau_1) \leq \xi_1\}} \cdots \mathbf{1}_{\{x(t+\tau_{N-1}) \leq \xi_{N-1}\}} \mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi_N\}} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

che è una valida distribuzione cumulativa congiunta di ordine N (esclusa la proprietà di continuità a destra rispetto a ξ_1, \dots, ξ_N), per ogni fissato valore di t e $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$, nell'ipotesi che l'insieme Γ_N delle frequenze della componente quasi periodica della funzione $\mathbf{1}_{\{x(t+\tau_1) \leq \xi_1\}} \cdots \mathbf{1}_{\{x(t+\tau_{N-1}) \leq \xi_{N-1}\}} \mathbf{1}_{\{x(t) \leq \xi_N\}}$ sia numerabile (per ogni valore $\xi_1, \dots, \xi_N, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$).

2.2 Ciclostazionarietà del secondo ordine

Se $x(t)$ è una serie temporale a valori reali, si ha che

$$R_x(t, \tau) = \sum_{\alpha \in A} R_x^\alpha(\tau) e^{j2\pi\alpha t} \tag{2.13}$$

con A insieme numerabile dove la funzione

$$R_x^\alpha(\tau) \triangleq \langle x(t + \tau)x(t)e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t \tag{2.14}$$

è la funzione di *autocorrelazione ciclica* alla *frequenza di ciclo* α ($\alpha \in \mathbb{R}$).

La classificazione del tipo di non stazionarietà di una serie temporale può essere fatta sulla base degli elementi contenuti nell'insieme A . Se l'insieme contiene frequenze di ciclo α incommensurabili, la serie temporale $x(t)$ è detta *quasi ciclostazionaria in senso lato* (*wide sense almost cyclostationary* (ACS)). Nel caso in cui $A \equiv \{k/T_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ la serie temporale $x(t)$ è detta *ciclostazionaria in senso lato* (*wide sense cyclostationary*). Infine, se l'insieme A contiene il solo elemento $\alpha = 0$ la serie temporale $x(t)$ è detta *stazionaria in senso lato* (*wide sense stationary*).

Consideriamo la caratterizzazione in senso lato del secondo ordine nel dominio della frequenza delle serie temporali ACS introducendo la funzione di correlazione spettrale

$$\begin{aligned}
 S_x(f_1, f_2) &\triangleq \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_{1/\Delta f}(t, f_1) X_{1/\Delta f}^*(t, f_2) dt \\
 &= \sum_{\alpha \in A} S_x^\alpha(f_1) \delta(f_2 - f_1 + \alpha)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

il suo supporto nel piano (f_1, f_2) è costituito da linee parallele con pendenza unitaria.

La funzione

$$S_x^\alpha(f) \triangleq \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta f X_{1/\Delta f}(t, f) X_{1/\Delta f}^*(t, f - \alpha) dt \tag{2.16}$$

è detta *spettro ciclico* o funzione di *densità di correlazione spettrale alla frequenza di ciclo* α e rappresenta la correlazione fra due componenti spettrali alle frequenze di ciclo f e $f - \alpha$ quando la banda tende a zero dove

$$X_{1/\Delta f}(t, f) \triangleq \int_{t - \frac{1}{2\Delta f}}^{t + \frac{1}{2\Delta f}} x(s) e^{j2\pi f s} ds. \tag{2.17}$$

Vale la relazione di Wiener ciclica

$$S_x^\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} R_x^\alpha(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \tag{2.18}$$

che lega lo spettro ciclico all'autocorrelazione ciclica.

Per $\alpha = 0$ lo spettro ciclico si riduce allo spettro di potenza. Nel caso di segnali stazionari non esiste alcuna correlazione fra componenti spettrali distinte, cioè si ha

$$S_x(f_1, f_2) = S_x^0(f_1) \delta(f_2 - f_1). \tag{2.19}$$

2.2.1 Serie temporali a tempo discreto

La caratterizzazione statistica delle serie temporali a tempo discreto (sequenze temporali) nell'approccio FOT può essere fatta introducendo l'operatore di estrazione della componente quasi periodica a tempo discreto $E^{\{\tilde{\alpha}\}}(\cdot)$ che è definito in maniera analoga al caso tempo continuo. E' possibile, quindi, (considerando la sola caratterizzazione del secondo ordine), introdurre una valida funzione di distribuzione congiunta

per ogni n, m (eccetto per la proprietà di continuità a destra rispetto a ξ_1, ξ_2)

$$F_{x(n+m)x(n)}^{\{\tilde{\alpha}\}}(\xi_1, \xi_2) \triangleq E^{\{\tilde{\alpha}\}} \{ \mathbf{1}_{\{x(n+m) \leq \xi_1\}} \mathbf{1}_{\{x(n) \leq \xi_2\}} \} \quad (2.20)$$

nelle ipotesi in cui l'insieme $\tilde{\Gamma}_2$ delle frequenze della componente quasi periodica della funzione di n $\mathbf{1}_{\{x(n+m) \leq \xi_1\}} \mathbf{1}_{\{x(n) \leq \xi_2\}}$ è numerabile per ogni valore di ξ_1, ξ_2 e m . In maniera analoga al caso tempo continuo, la derivata rispetto a ξ_1 e ξ_2 della (2.20), denotata da $f_{x(n+m)x(n)}^{\{\tilde{\alpha}\}}(\xi_1, \xi_2)$, è una valida funzione di densità di probabilità congiunta del secondo ordine.

Introduciamo ora la funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} \tilde{R}_x(n, m) &\triangleq E^{\{\tilde{\alpha}\}} \{ x(n+m)x(n) \} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \xi_1 \xi_2 f_{x(n+m)x(n)}^{\{\tilde{\alpha}\}}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{A}} \tilde{R}_x^{\tilde{\alpha}}(m) e^{j2\pi \tilde{\alpha} n} \end{aligned} \quad (2.21)$$

con

$$\tilde{A} \triangleq \{ \tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2) : \tilde{R}_x^{\tilde{\alpha}}(m) \neq 0 \} \quad (2.22)$$

insieme numerabile e la funzione

$$\tilde{R}_x^{\tilde{\alpha}} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+m)x(n) e^{-j2\pi \tilde{\alpha} n} \quad (2.23)$$

che è la funzione di *autocorrelazione ciclica a tempo discreto alla frequenza di ciclo $\tilde{\alpha}$* .

La (2.21) è periodica in $\tilde{\alpha}$ di periodo 1; la somma nella (2.21) può essere estesa all'insieme

$$\tilde{A}_1 \triangleq \{ \tilde{\alpha} \in [0, 1) : \tilde{R}_x^{\tilde{\alpha}}(m) \neq 0 \}. \quad (2.24)$$

Se l'insieme \tilde{A} contiene frequenze di ciclo $\tilde{\alpha}$ incommensurabili, la sequenza è detta *quasi ciclostazionaria in senso lato*; se $\tilde{A}_1 \equiv \{0, 1/N_0, \dots, (N_0-1)/N_0\}$ per qualche intero N_0 , allora la sequenza $x(n)$

è *ciclostazionaria in senso lato*; se l'insieme \tilde{A} contiene il solo elemento $\tilde{\alpha} = 0$, allora la sequenza è *stazionaria in senso lato*.

Lo *spettro ciclico* o la funzione di *densità di correlazione spettrale alla frequenza di ciclo* $\tilde{\alpha}$ è dato da

$$\tilde{S}_x^{\tilde{\alpha}}(\nu) \triangleq \lim_{\Delta\nu \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \Delta\nu X_{\lfloor 1/\Delta\nu \rfloor}(n, \nu) X_{\lfloor 1/\Delta\nu \rfloor}^*(t, \nu - \tilde{\alpha}) \quad (2.25)$$

dove

$$X_{2M+1}(n, \nu) \triangleq \sum_{k=n-M}^{n+M} x(k) e^{-j2\pi k\nu} \quad (2.26)$$

con l'operatore $\lfloor \cdot \rfloor$ che seleziona l'intero dispari più vicino e con $*$ che rappresenta l'operazione di coniugazione complessa.

Vale, come nell'analisi a tempo continuo, la relazione di Wiener ciclica

$$\tilde{S}_x^{\tilde{\alpha}}(\nu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{R}_x^{\tilde{\alpha}}(m) e^{-j2\pi\nu m} \quad (2.27)$$

che lega lo spettro ciclico all'autocorrelazione ciclica.

2.3 Segnali complessi

Data una serie temporale $x(t)$ a tempo continuo e a valori complessi, una caratterizzazione in senso lato (limitata al secondo ordine) può essere fatta introducendo i due momenti del secondo ordine

$$\begin{aligned} R_{xx^*}(t, \tau) &\triangleq E^{\{\alpha\}} \{x(t + \tau) x^*(t)\} \\ &= \sum_{\alpha \in A_{xx^*}} R_{xx^*}^{\alpha}(\tau) e^{j2\pi\alpha t} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} R_{xx}(t, \tau) &\triangleq E^{\{\beta\}} \{x(t + \tau) x(t)\} \\ &= \sum_{\beta \in A_{xx}} R_{xx}^{\beta}(\tau) e^{j2\pi\beta t} \end{aligned} \quad (2.29)$$

che sono dette *funzioni di autocorrelazione* e *funzione di autocorrelazione coniugata*, rispettivamente.

I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier

$$R_{xx^*}^\alpha(\tau) \triangleq \langle x(t+\tau)x^*(t)e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t \quad (2.30)$$

$$R_{xx}^\beta(\tau) \triangleq \langle x(t+\tau)x(t)e^{-j2\pi\beta t} \rangle_t \quad (2.31)$$

sono detti *funzione di autocorrelazione ciclica* alla frequenza di ciclo α e *funzione di autocorrelazione ciclica coniugata* alla frequenza di ciclo coniugata β , rispettivamente.

Le trasformate di Fourier della funzione di autocorrelazione ciclica e della funzione di autocorrelazione ciclica coniugata

$$S_{xx^*}^\alpha(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}} R_{xx^*}^\alpha(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.32)$$

$$S_{xx}^\beta(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}} R_{xx}^\beta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.33)$$

sono dette *spettro ciclico* e *spettro ciclico coniugato*, rispettivamente.

Una serie temporale $x(t)$ a valori complessi è detta *circolare* se la funzione di autocorrelazione coniugata è nulla [32].

2.4 Trasformazioni lineari quasi periodicamente tempo varianti

Una trasformazione lineare tempo variante, caratterizzata dalla risposta impulsiva $h(t, u)$, presenta la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, u)x(u)du. \quad (2.34)$$

Molte elaborazioni compiute sui segnali, come la modulazione e il campionamento, sono trasformazioni lineari quasi periodicamente tempo varianti (linear almost-periodically time-variant(LAPTV)); esse hanno la proprietà di introdurre nuove periodicità trasformando un segnale stazionario in uno ciclostazionario ed un segnale ciclostazionario in uno quasi ciclostazionario. La risposta impulsiva di una trasformazione LAPTV è sviluppabile in serie di Fourier

$$h(t, u) = \sum_{\sigma \in G} h_\sigma(t - u)e^{j2\pi\sigma u} \quad (2.35)$$

con G insieme numerabile.

Per l'uscita $y(t)$ corrispondente ad un ingresso $x(t)$ valgono le seguenti relazioni

$$y(t) = \sum_{\sigma \in G} h_{\sigma}(t) \otimes [x(t)e^{j2\pi\sigma u}] \quad (2.36)$$

$$= \sum_{\sigma \in G} [g_{\sigma}(t) \otimes x(t)]e^{j2\pi\sigma u} \quad (2.37)$$

dove

$$g_{\sigma}(t) \triangleq h_{\sigma}(t)e^{j2\pi\sigma u} \quad (2.38)$$

dalle quali segue che una trasformazione LPTV è equivalente ad un filtraggio lineare tempo invariante della versione traslata in frequenza dell'ingresso (frequency shift filtering (FRESH)) o, in maniera equivalente, ad una traslazione in frequenza della versione dell'ingresso elaborata da un filtro tempo invariante.

2.4.1 Relazioni ingresso-uscita in termini di statistiche cicliche

Date due serie temporali ACS $x_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$ a valori complessi, la ciclostazionarietà congiunta può essere caratterizzata dalla funzione di *mutua correlazione (coniugata) del secondo ordine*

$$\begin{aligned} R_{x_1 x_2^{(*)}}(t, \tau) &\triangleq E^{\{\alpha\}} \{x_1(t + \tau) x_2^{(*)}(t)\} \\ &= \sum_{\alpha \in A_{12}} R_{x_1 x_2^{(*)}}^{\alpha}(\tau) e^{j2\pi\alpha t} \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove $(*)$ indica una coniugazione opzionale, la funzione

$$R_{x_1 x_2^{(*)}}^{\alpha}(\tau) \triangleq \left\langle x_1(t + \tau) x_2^{(*)}(t) e^{-j2\pi\alpha t} \right\rangle_t \quad (2.40)$$

è la *mutua correlazione ciclica (coniugata)* fra x_1 e x_2 alla frequenza di ciclo α e

$$A_{12} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{R}, R_{x_1 x_2^{(*)}}^{\alpha}(\tau) \neq 0\} \quad (2.41)$$

è un insieme numerabile. Se A_{12} contiene almeno un elemento non nullo, le due serie temporali sono dette congiuntamente ciclostazionarie.

Dati due sistemi lineari LAPT con risposte impulsive $h_i(t, u)$, $i = 1, 2$, dalla (2.35) si ricava

$$h_i(t, u) = \sum_{\sigma_i \in G_i} h_{\sigma_i}(t - u) e^{(j2\pi\sigma_i u)} \quad i = 1, 2. \quad (2.42)$$

La mutua correlazione (coniugata) delle uscite

$$y_i(t) = \int_{\mathbb{R}} h_i(t, u) x_i(u) du \quad i = 1, 2 \quad (2.43)$$

è data da

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2^{(*)}}(t, \tau) &\triangleq E^{\{\alpha\}} \{y_1(t + \tau) y_2^{(*)}(t)\} \\ &= \sum_{\alpha \in A_{12}} \sum_{\sigma_1 \in G_1} \sum_{\sigma_2 \in G_2} \left[R_{x_1 x_2^{(*)}}^{\alpha}(\tau) e^{j2\pi\sigma_1 \tau} \right] \\ &\quad \otimes_{\tau} r_{\sigma_1 \sigma_2^{(*)}}^{\alpha + \sigma_1 + (-)\sigma_2}(\tau) e^{j2\pi(\alpha + \sigma_1 + (-)\sigma_2)t} \end{aligned} \quad (2.44)$$

dove \otimes_{τ} indica la convoluzione rispetto a τ e

$$r_{\sigma_1 \sigma_2^{(*)}}^{\gamma}(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} h_{\sigma_1}(\tau + s) h_{\sigma_2^{(*)}}^{*}(s) e^{-j2\pi\gamma s} ds. \quad (2.45)$$

Si avrà quindi

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2^{(*)}}^{\beta}(\tau) &\triangleq \left\langle y_1(t + \tau) y_2^{(*)}(t) e^{-j2\pi\beta t} \right\rangle_t \\ &= \sum_{\sigma_1 \in G_1} \sum_{\sigma_2 \in G_2} \left[R_{x_1 x_2^{(*)}}^{\beta - \sigma_1 - (-)\sigma_2}(\tau) e^{j2\pi\sigma_1 \tau} \right] \otimes_{\tau} r_{\sigma_1 \sigma_2^{(*)}}^{\beta}(\tau) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} S_{y_1 y_2^{(*)}}^{\beta}(f) &\triangleq \int_{\mathbb{R}} R_{y_1 y_2^{(*)}}^{\beta}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \sum_{\sigma_1 \in G_1} \sum_{\sigma_2 \in G_2} S_{x_1 x_2^{(*)}}^{\beta - \sigma_1 - (-)\sigma_2}(f - \sigma_1) H_{\sigma_1}(f) H_{\sigma_2^{(*)}}^{*}((-)(\beta - f)) \end{aligned} \quad (2.47)$$

dove

$$H_{\sigma_1}(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f_{\sigma_1}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.48)$$

Nelle (2.46), (2.47) il segno meno opzionale $(-)$ è legato alla coniugazione opzionale $(*)$.

Le (2.46), (2.47), nel caso in cui $x_1 = x_2 = x$, $h_1 = h_2 = h$, e $y_1 = y_2 = y$ ed è presente la coniugazione, diventano :

$$R_{yy^*}^{\beta}(\tau) = \sum_{\sigma_1 \in G_1} \sum_{\sigma_2 \in G_2} \left[R_{x_1 x_2^*}^{\beta - \sigma_1 + \sigma_2}(\tau) e^{j2\pi \sigma_1 \tau} \right] \underset{\tau}{\otimes} r_{12}^{\beta}(\tau) \quad (2.49)$$

$$S_{y_1 y_2^*}^{\beta}(f) = \sum_{\sigma_1 \in G_1} \sum_{\sigma_2 \in G_2} S_{x_1 x_2^*}^{\beta - \sigma_1 + \sigma_2}(f - \sigma_1) H_{\sigma_1}(f) H_{\sigma_2}^*(f - \beta) \quad (2.50)$$

con

$$r_{12}^{\beta}(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} h_{\sigma_1}(\tau + s) h_{\sigma_2}^*(s) e^{-j2\pi \beta s} ds \quad (2.51)$$

che rappresentano le relazioni ingresso uscita in termini dei parametri ciclici per una trasformazione LAPT_V.

2.5 Prodotto di segnali ciclostazionari

Date due serie temporali $x(t)$ e $c(t)$, esse si dicono statisticamente indipendenti nell'approccio FOT se la loro funzione di densità di probabilità congiunta si fattorizza nel prodotto delle densità marginali. Siano

$$R_{xx^{(*)}}(t, \tau) = \sum_{\alpha_x \in A_{xx^{(*)}}} R_{xx^{(*)}}^{\alpha_x}(\tau) e^{j2\pi \alpha_x t} \quad (2.52)$$

$$R_{cc^{(*)}}(t, \tau) = \sum_{\alpha_c \in A_{cc^{(*)}}} R_{cc^{(*)}}^{\alpha_c}(\tau) e^{j2\pi \alpha_c t}. \quad (2.53)$$

Nell'ipotesi di indipendenza statistica, la funzione di autocorrelazione (coniugata) del segnale

$$y(t) = c(t)x(t) \quad (2.54)$$

è data da

$$R_{yy^{(*)}}(t, \tau) = R_{cc^{(*)}}(t, \tau) R_{xx^{(*)}}(t, \tau). \quad (2.55)$$

La funzione di autocorrelazione ciclica (coniugata) e lo spettro ciclico (coniugato) del segnale $y(t)$ sono, rispettivamente,

$$R_{yy^{(*)}}^{\alpha}(\tau) = \sum_{\alpha_x \in A_{xx^{(*)}}} R_{xx^{(*)}}^{\alpha_x}(\tau) R_{cc^{(*)}}^{\alpha - \alpha_x}(\tau) \quad (2.56)$$

$$S_{yy^{(*)}}^{\alpha}(f) = \sum_{\alpha_x \in A_{xx^{(*)}}} \int_{\mathbb{R}} S_{xx^{(*)}}^{\alpha_x}(\lambda) S_{cc^{(*)}}^{\alpha - \alpha_x}(f - \lambda) d\lambda. \quad (2.57)$$

2.6 Campionamento e aliasing

Sia $x(n)$ una sequenza ottenuta campionando uniformemente con periodo $T_s = 1/f_s$ il segnale tempo continuo $x_a(t)$:

$$x(n) \triangleq x_a(t)|_{t=nT_s} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.58)$$

La funzione di autocorrelazione (coniugata) del segnale tempo discreto $x(n)$ è la versione campionata della funzione di autocorrelazione (coniugata) del segnale tempo continuo $x_a(t)$:

$$E^{\{\tilde{\alpha}\}}\{x(n+m)x^{(*)}(n)\} = E^{\{\alpha\}}\{x_a(t+\tau)x_a^{(*)}(t)\}|_{t=nT_s, \tau=mT_s} \quad (2.59)$$

Valgono le seguenti relazioni per la funzione di autocorrelazione ciclica (coniugata) e per lo spettro ciclico coniugato della sequenza $x(n)$ [16],[22]

$$\tilde{R}_{xx^{*}}^{\tilde{\alpha}}(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} R_{x_a x_a^{(*)}}^{\alpha - pf_s}(\tau)|_{\tau=mT_s, \alpha=\tilde{\alpha}f_s} \quad (2.60)$$

$$\tilde{S}_{xx^{*}}^{\tilde{\alpha}}(\nu) = \frac{1}{T_s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} S_{x_a x_a^{(*)}}^{\alpha - pf_s}(f - qf_s)|_{f=\nu f_s, \alpha=\tilde{\alpha}f_s} \quad (2.61)$$

dalle quali si deduce che, per la presenza di aliasing sia nel dominio delle frequenze di ciclo che in quello delle frequenze spettrali, le (2.60), (2.61) non sono le versioni campionate delle funzioni corrispondenti della serie $x_a(t)$.

Per determinare una condizione sulla frequenza di campionamento f_s che assicuri la non sovrapposizione delle repliche presenti nelle (2.60), (2.61), si consideri un segnale $x(t)$ a banda limitata con banda monolaterale B per il quale si avrà

$$\begin{aligned} \text{supp}[S_{xx(*)}^\alpha(f)] &\subseteq \{(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |f| \leq B, |\alpha - f| \leq B\} \\ &\subseteq \{(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |f| \leq B, |\alpha| \leq 2B\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Il supporto di ogni replica è contenuto nell'insieme

$$\{(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |f - pf_s| \leq B, |\alpha - pf_s| \leq 2B\}. \quad (2.63)$$

Una condizione sufficiente che assicuri assenza di aliasing è

$$f_s \geq 4B \quad (2.64)$$

e solo la replica con $p = 0$ dà contributo non nullo nel dominio principale. Si ha, quindi:

$$R_{x_a x_a(*)}^\alpha(\tau)|_{\tau=mT_s} = \begin{cases} \tilde{R}_{xx(*)}^{\tilde{\alpha}}(\tau)|_{\tilde{\alpha}=\alpha/f_s} & |\alpha| \leq \frac{f_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.65)$$

$$S_{x_a x_a(*)}^\alpha(f) = \begin{cases} T_s \tilde{S}_{xx(*)}^{\tilde{\alpha}}(\nu)|_{\nu=f/f_s, \tilde{\alpha}=\alpha/f_s} & |\alpha| \leq \frac{f_s}{2}, |f| \leq \frac{f_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.66)$$

ed è, pertanto, possibile ricostruire lo spettro ciclico del segnale a tempo continuo a partire da quello del segnale a tempo discreto.

2.7 Stimatori

Nell'approccio FOT i parametri statistici sono definiti attraverso medie temporali di singole funzioni su intervalli temporali di lunghezza infinita e non come medie d'insieme di un processo stocastico come avviene nell'approccio stocastico classico. Gli stimatori dei parametri statistici nell'approccio FOT sono ottenuti considerando medie su intervalli di durata finita delle stesse quantità coinvolte nelle definizioni dei parametri

statistici. Se tali limiti esistono (per ipotesi) non è necessario ricorrere ad ipotesi di ergodicità per stabilire la convergenza degli stimatori asintotici al valore vero.

E' possibile introdurre nell'approccio FOT i concetti di Bias e Varianza. Sia $z(t)$ una serie temporale e definiamo

$$z_{\beta}(t)_T \triangleq \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} z(u) e^{-j2\pi\beta u} du \quad (2.67)$$

$$z_{\beta} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} z(u) e^{-j2\pi\beta u} du \quad (2.68)$$

La funzione $z_{\beta}(t)_T$ è uno stimatore di z_{β} basato sulle osservazioni $\{z(u), u \in [t - T/2, t + T/2]\}$. L'operazione di estrazione della componente quasi periodica nell'approccio FOT svolge lo stesso ruolo della media statistica nell'approccio stocastico tradizionale, da cui deriva che il bias e la varianza dello stimatore $z_{\beta}(t)_T$ sono

$$\begin{aligned} \text{bias}\{z_{\beta}(t)_T\} &\triangleq E^{\{\alpha\}}\{z_{\beta}(t)_T\} - z_{\beta} \\ &\simeq \langle z_{\beta}(t)_T \rangle_t - z_{\beta} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \text{var}\{z_{\beta}(t)_T\} &\triangleq E^{\{\alpha\}} \left\{ \left| z_{\beta}(t)_T - E^{\{\alpha\}} z_{\beta}(t)_T \right|^2 \right\} \\ &\simeq \left\langle \left| z_{\beta}(t)_T - \langle z_{\beta}(t)_T \rangle_t \right|^2 \right\rangle_t \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\langle |z_{\beta}(t)_T - z_{\beta}|^2 \rangle_t \simeq \text{var}\{z_{\beta}(t)_T\} + |\text{bias}\{z_{\beta}(t)_T\}|^2 \quad (2.71)$$

dove l'approssimazione diventa esatta per $t \rightarrow \infty$. L'affermazione che uno stimatore tende asintoticamente al valore vero in media quadratica nell'approccio FOT è equivalente all'analogia affermazione nell'approccio stocastico tradizionale.

2.7.1 Stime della funzione di Autocorrelazione Ciclica e dello Spettro Ciclico

Nell'ipotesi in cui la serie temporale $x(t)$ ha memoria finita (mixing conditions), il *correlogramma ciclico*

$$R_x^\alpha(\tau; t_0, T) \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t+\tau)x(t)e^{-j2\pi\alpha t} dt \quad (2.72)$$

è uno stimatore consistente asintoticamente non polarizzato della funzione di autocorrelazione ciclica R_x^α .

Nel dominio della frequenza il *periodogramma ciclico*

$$I_x^\alpha(t, f) \triangleq \frac{1}{T} X_T(t, f) X_T^*(t, f - \alpha) \quad (2.73)$$

con $X_T(t, f)$ definita in accordo con la (2.17), è uno stimatore asintoticamente non polarizzato, ma non consistente, dello spettro ciclico $S_x^\alpha(f)$. Nelle ipotesi che la serie temporale abbia memoria finita, si ha che il periodogramma ciclico mediato in frequenza (frequency-smoothed)

$$S_{x_T}^\alpha(t_0, f)_{\Delta f} \triangleq \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \frac{1}{T} X_T(t_0, \lambda) X_T^*(t_0, \lambda - \alpha) d\lambda \quad (2.74)$$

è uno stimatore consistente dello spettro ciclico.

Il periodogramma ciclico mediato nel tempo (time-smoothed)

$$S_{x_{1/\Delta f}}^\alpha(t, f)_T \triangleq \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \Delta f X_{1/\Delta f}(s, f) X_{1/\Delta f}^*(s, f - \alpha) ds \quad (2.75)$$

è asintoticamente equivalente al periodogramma ciclico mediato in frequenza; cioè

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} S_{x_T}^\alpha(t, f)_{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} S_{x_{1/\Delta f}}^\alpha(t, f)_T. \quad (2.76)$$

Sia il periodogramma ciclico mediato in frequenza (2.74), che il periodogramma ciclico mediato nel tempo (2.75), presentano risoluzione spettrale dell'ordine di Δf e risoluzione delle frequenze cicliche dell'ordine $1/T$.

2.8 Esempi di segnali ciclostazionari

La ciclostazionarietà introdotta dall'uomo nei segnali coinvolti nelle comunicazioni è dovuta ad operazioni di modulazione, campionamento e successive elaborazioni compiute sul segnale.

2.8.1 Segnale modulato in ampiezza

Come esempio di segnali ciclostazionari consideriamo il segnale modulato in ampiezza (Double Side-Band Amplitud -Modulated (DSB-AM))

$$x(t) \triangleq s(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_0). \quad (2.77)$$

L'autocorrelazione ciclica e lo spettro ciclico di $x(t)$ sono dati da

$$\begin{aligned} R_x^\alpha(\tau) &= \frac{1}{2} R_s^\alpha(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &+ \frac{1}{4} \left\{ e^{j(2\pi f_0 \tau + 2\phi_0)} R_s^{\alpha-2f_0}(\tau) + e^{-j(2\pi f_0 \tau + 2\phi_0)} R_s^{\alpha+2f_0}(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} S_x^\alpha(f) &= \frac{1}{4} \{ S_s^\alpha(f - f_0) \\ &+ S_s^\alpha(f + f_0) + S_s^{\alpha-2f_0}(f - f_0) e^{j2\phi_0} + S_s^{\alpha+2f_0}(f + f_0) e^{-j2\phi_0} \} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Se $s(t)$ è un segnale stazionario in senso lato allora, si ha che $R_s^\alpha(\tau) = R_s^0(\tau) \delta_\alpha$. Le (2.78), (2.79) diventano

$$R_x^\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} R_s^0(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) & \alpha = 0 \\ \frac{1}{4} e^{\pm j(2\pi f_0 \tau + 2\phi_0)} R_s^0(\tau) & \alpha = \pm f_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.80)$$

$$S_x^\alpha(f) = \begin{cases} \frac{1}{4} \{ S_s^0(f + f_0) + S_s^0(f - f_0) \} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{4} e^{\pm j2\phi_0} S_s^0(f \mp f_0) & \alpha = \pm f_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.81)$$

2.8.2 Segnale PAM

Sia $x(t)$ un segnale PAM (Pulse Amplitude Modulated) a valori complessi:

$$x(t) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k q(t - kT_0) \quad (2.82)$$

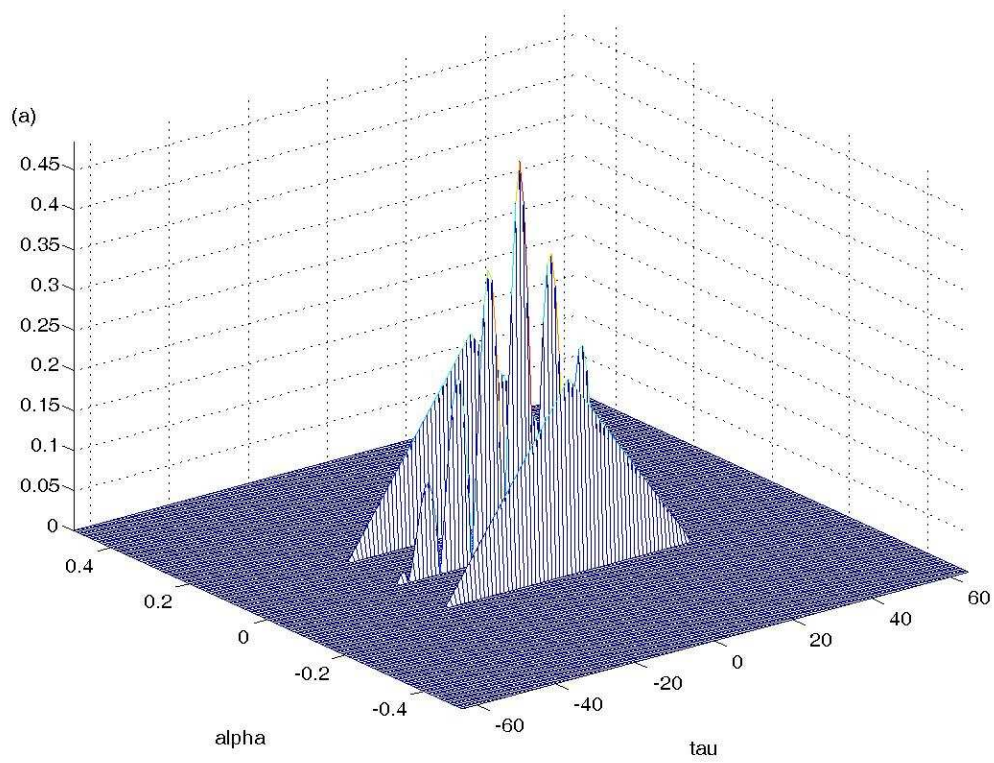


Figura 2.1: Ampiezza della funzione di autocorrelazione ciclica $R_x^\alpha(\tau)$ come funzione di α e τ del segnale (2.77).

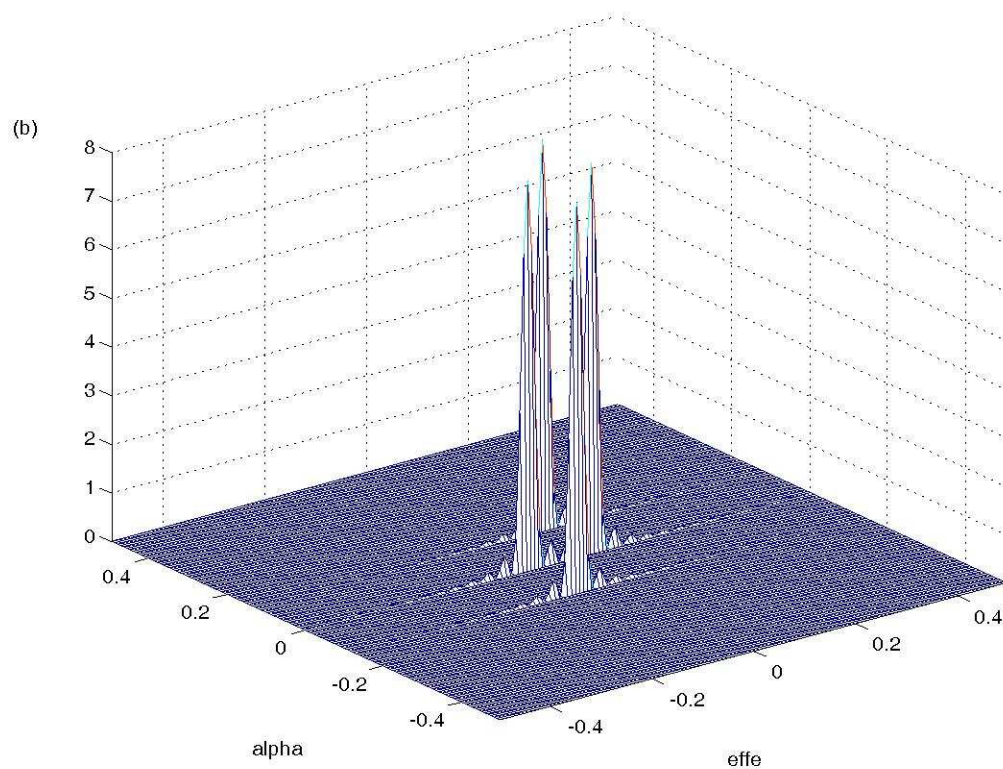


Figura 2.2: Ampiezza dello spettro ciclico $S_x^\alpha(f)$ come funzione di α e f del segnale (2.77).

con l'impulso $q(t)$ avente trasformata di Fourier

$$Q(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}} q(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.83)$$

e la sequenza $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $a_k \in \mathbb{C}$ di tipo ACS.

La funzione di autocorrelazione ciclica (coniugata) e lo spettro ciclico (coniugato) del segnale $x(t)$ sono dati da

$$R_{xx(*)}^\alpha(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\tilde{R}_{aa(*)}^{\tilde{\alpha}}(m) \right]_{\tilde{\alpha}=\alpha T_0} \tilde{r}_{qq(*)}^\alpha(\tau - mT_0) \quad (2.84)$$

$$S_{xx(*)}^{\tilde{\alpha}}(\nu) = \frac{1}{T_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\tilde{S}_{aa(*)}^{\tilde{\alpha}}(\nu) \right]_{\nu=fT_0, \tilde{\alpha}=\alpha T_0} Q(f) Q^{(*)}((-)(\alpha - f)) \quad (2.85)$$

dove

$$\tilde{R}_{aa(*)}^{\tilde{\alpha}}(m) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N a_{k+m} a_k^{(*)} e^{-j2\pi \tilde{\alpha} k} \quad (2.86)$$

$$\tilde{S}_{aa(*)}^{\tilde{\alpha}}(\nu) \triangleq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{R}_{aa(*)}^\alpha(m) e^{-j2\pi \nu m} \quad (2.87)$$

con

$$r_{qq(*)}^\alpha(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} q(t) q(t + \tau) e^{-j2\pi \alpha t} dt. \quad (2.88)$$

Se la sequenza $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è stazionaria in senso lato ed è bianca, si ha

$$\tilde{R}_{aa(*)}^\alpha(m) = \tilde{R}_{aa(*)}^0(m) \delta_{(\tilde{\alpha} \bmod 1)} \delta_m \quad (2.89)$$

con δ_γ delta di Kronecker e \bmod operazione di modulo. In questa ipotesi le (2.84), (2.85) diventano

$$R_{xx(*)}^\alpha(\tau) = \frac{\tilde{R}_{aa(*)}^0(0)}{T_0} \delta_{(\alpha T_0 \bmod 1)} r_{qq(*)}^\alpha(\tau) \quad (2.90)$$

$$S_{xx(*)}^\alpha(\tau) = \frac{\tilde{R}_{aa(*)}^0(0)}{T_0} \delta_{(\alpha T_0 \bmod 1)} Q(f) Q^{(*)}((-)f - \alpha) \quad (2.91)$$

rispettivamente.

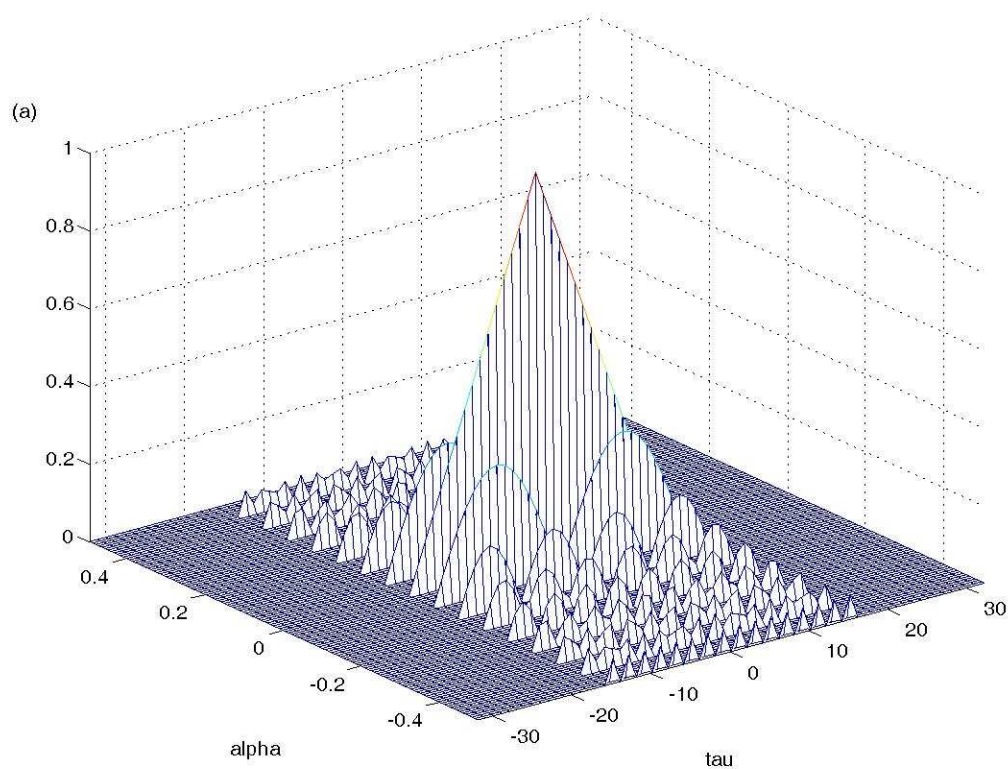


Figura 2.3: Ampiezza della funzione di autocorrelazione ciclica $R_x^\alpha(\tau)$ come funzione di α e τ del segnale PAM (2.82) con una sequenza $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stazionaria e l'impulso $q(t)$ rettangolare.

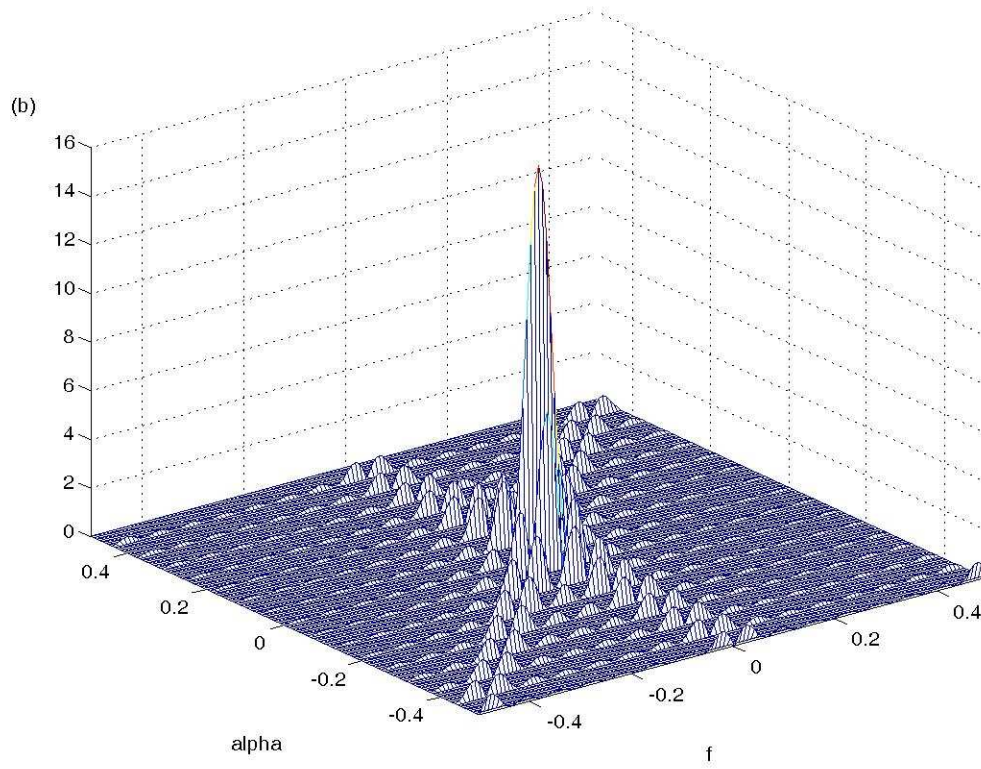


Figura 2.4: Ampiezza dello spettro ciclico $S_x^\alpha(f)$ come funzione di α e f del segnale PAM (2.82) con una sequenza $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stazionaria e l'impulso $q(t)$ rettangolare.

2.9 Statistiche di ordine superiore

Un segnale $x(t)$ ha ciclostazionarietà di ordine superiore se esiste una trasformazione omogenea non lineare di $x(t)$ di ordine superiore al secondo che genera componenti additive sinusoidali. Numerose sono le motivazioni che possono spingere a studiare ciclostazionarietà di ordine superiore [13],[22],[36]:

1. Segnali che non hanno ciclostazionarietà del secondo ordine possono avere ciclostazionarietà di ordine superiore.
2. Il filtraggio a banda stretta può distruggere ciclostazionarietà del secondo ordine.
3. L'uso della ciclostazionarietà di ordine superiore può essere utile per operazioni di classificazione dei segnali. Molti segnali coinvolti nelle comunicazioni possono, infatti, presentare uguali frequenze di ciclo del secondo ordine e risultano distinguibili solo se si ricorre a ciclostazionarietà di ordine superiore.

2.9.1 Statistiche cicliche di ordine superiore per segnali a tempo continuo

Consideriamo un vettore colonna $\mathbf{x}(t) \triangleq [x_1^{(*)1}(t), \dots, x_N^{(*)N}(t)]^T$ dove le sue componenti sono N segnali tempo-continui, a valori complessi non necessariamente distinti con $(*)_k$ che rappresenta una coniugazione opzionale del k -esimo segnale $x_k(t)$ e T l'operazione di trasposizione. Le N serie temporali hanno ciclostazionarietà congiunta di ordine N in senso ampio con frequenza di ciclo $\alpha \neq 0$ se almeno una delle funzioni di *momento mutuo temporale ciclico* (*Cyclic temporal cross moment function* (CTCMF))

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \left\langle \prod_{k=1}^N x_k^{(*)k}(t + \tau_k) e^{-j2\pi\alpha t} \right\rangle_t \quad (2.92)$$

non è identicamente nullo, con $\boldsymbol{\tau} \triangleq [\tau_1, \dots, \tau_N]^T$. Le N serie temporali hanno ciclostazionarietà congiunta in senso lato di ordine N con frequenza di ciclo $\alpha \neq 0$ se, per qualche valore di $\boldsymbol{\tau}$, il *lag-product*

$$L_x(t, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \prod_{k=1}^N x_k^{(*)k}(t + \tau_k) \quad (2.93)$$

contiene una componente additiva sinusoidale alla frequenza α di ampiezza e fase pari all'ampiezza e fase di $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau})$.

La funzione *Momento temporale mutuo* (*temporal cross moment function* (TCMF)) è definita come

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\tau}) &\triangleq E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\tau})\} \\ &= \sum_{\alpha \in A_{\mathbf{x}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\alpha t}\end{aligned}\quad (2.94)$$

dove $A_{\mathbf{x}}$ è l'insieme numerabile, non dipendente da $\boldsymbol{\tau}$, delle frequenze di ciclo di ordine N delle serie temporali $x_1^{(*)1}(t + \tau_1), \dots, x_N^{(*)N}(t + \tau_N)$, per una data configurazione di coniugazioni.

La trasformata di Fourier N-dimensionale della CTCMF

$$\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi\mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \quad (2.95)$$

con $\mathbf{f} \triangleq [f_1, \dots, f_N]^T$, è detta funzione *Momento spettrale ciclico mutuo di ordine N* (*cyclic spectral cross moment function* (CSCMF)) e può essere scritta come

$$\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}) = \mathcal{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}') \delta(\mathbf{f}^T \mathbf{1} - \alpha) \quad (2.96)$$

con $\mathbf{1} \triangleq [1, \dots, 1]^T$ e $\mathbf{u}' \triangleq [u_1, \dots, u_{k-1}]^T$ versione ridotta del vettore $\mathbf{u} \triangleq [u_1, \dots, u_k]^T$.

La funzione $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}')$ è detta CSCMF a dimensione ridotta (reduced dimension CSCMF (RD-CSCMF)), ed è così definita:

$$\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}') \triangleq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}') e^{-j2\pi\mathbf{f}'^T \boldsymbol{\tau}'} d\boldsymbol{\tau}' \quad (2.97)$$

dove

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}') \triangleq \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau})|_{\tau_N=0} \quad (2.98)$$

è il CTCMF a dimensione ridotta (reduced dimension (RD-CTCMF)).

Il RD-CSCMF può essere espresso anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}') &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{Z} \int_{t-Z/2}^{t+Z/2} \frac{1}{T} X_{N,T}^{(*)N}(u, (-)_N(\alpha - \mathbf{f}'^T \mathbf{1})) \\ &\quad \prod_{k=1}^{N-1} X_{k,T}^{(*)k}(u, (-)_k f_k) du\end{aligned}\quad (2.99)$$

dove

$$X_{k,T}(t, f_k) \triangleq \int_{t-T/2}^{t+T/2} x_k(s) e^{-j2\pi f_k s} ds \quad (2.100)$$

e $(-)_k$ è un meno opzionale collegato alla coniugazione opzionale.

La funzione $R_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}')$ non è assolutamente integrabile perchè essa non decade per $\|\boldsymbol{\tau}'\| \rightarrow \infty$, ma oscilla. Questo comporta che $S_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}')$ può contenere impulsi e $S_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f})$ prodotti di impulsi. Si dimostra che $S_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\mathbf{f}')$ può contenere termini impulsivi se il vettore \mathbf{f} con $f_N = \beta - \sum_{k=1}^{N-1} f_k$ giace nel β -submanifold, cioè se esiste almeno una partizione $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ di $\{1, \dots, N\}$ con $p > 1$ tale che ogni somma $\alpha_{\mu_i} = \sum_{k \in \mu_i} f_k$ è una frequenza di ciclo di ordine μ_i del segnale $x(t)$ con $|\mu_i|$ numero degli elementi in μ_i . Nel dominio spettrale una funzione dal comportamento regolare può essere introdotta considerando la funzione *cumulante temporale mutuo di ordine N* (*temporal cross cumulant function (TCCF)*)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\tau}) &\triangleq \text{cum} \left\{ x_k^{(*)k}(t + \tau_k), k = 1, \dots, N \right\} \\ &= (-j)^N \frac{\partial^N}{\partial \omega_1, \dots, \partial \omega_N} \log_e E^{\{\alpha\}} \left\{ \exp \left[j \sum_{k=1}^N \omega_k x_k^{(*)k}(t + \tau_k) \right] \right\} \Big|_{\boldsymbol{\omega}=0} \\ &= \sum_P \left[(-)^{p-1} (p-1)! \prod_{i=1}^p \mathcal{R}_{\mathbf{x}_{\mu_i}}(t, \boldsymbol{\tau}_{\mu_i}) \right], \end{aligned} \quad (2.101)$$

dove $\boldsymbol{\omega} \triangleq [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$, P è l'insieme delle partizioni distinte di $\{1, \dots, N\}$, ognuna costituita dai sottoinsiemi $\{\mu_i, i = 1, \dots, p\}$, \mathbf{x}_{μ_i} è il vettore μ_i -dimensionale le cui componenti sono quelle di \mathbf{x} aventi indice in μ_i . Facendo la trasformata di Fourier N-dimensionale dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier e della (2.101)

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \left\langle \mathcal{C}_{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi\beta t} \right\rangle_t \quad (2.102)$$

chiamata funzione *Cumulante mutuo temporale ciclico* (*cyclic temporal cross cumulant function (CTCCF)* di ordine N , si ottiene la funzione *Cumulante mutuo spettrale ciclico* (*cyclic spectral cross cumulant function (CSCCF)*)

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}^{\beta}(\mathbf{f}) = P_{\mathbf{x}}^{\beta}(\mathbf{f}') \delta(\mathbf{f}^T \mathbf{1} - \beta) \quad (2.103)$$

dove

$$P_{\mathbf{x}}^{\beta}(\mathbf{f}') \triangleq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} C_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}') e^{-j2\pi \mathbf{f}'^T \boldsymbol{\tau}'} d\boldsymbol{\tau}' \quad (2.104)$$

è il *Polispettro mutuo ciclico di ordine N (cyclic cross polyspectrum (CCP))* e

$$C_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}') \triangleq C_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau})|_{\tau_N=0} \quad (2.105)$$

è chiamato *CTCCF a dimensione ridotta (reduced dimension (RD-CTCCF))*. Il polispettro ciclico è una funzione dal comportamento regolare nelle ipotesi che le serie temporali $x_N(t)$ e $x_k(t + \tau_k)$ con $k = 1, \dots, N-1$ sono asintoticamente indipendenti per $|\tau_k| \rightarrow \infty$ tale che $C_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}') \rightarrow 0$ quando $\|\boldsymbol{\tau}'\| \rightarrow \infty$.

2.9.2 Statistiche cicliche di ordine superiore per segnali a tempo discreto

Date N serie temporali a valori complessi tempo discreto, non necessariamente distinte, esse hanno ciclostazionarietà congiunta di ordine N in senso lato con frequenza di ciclo $\tilde{\alpha} \neq 0$ ($\tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[$) se almeno uno dei CTCMF di ordine N

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \prod_{k=1}^N x_k^{(*)k}(n + m_k) e^{-j2\pi \tilde{\alpha} n} \quad (2.106)$$

non è identicamente nullo, con $\mathbf{x}(n) \triangleq [x_1^{(*)1}(n), \dots, x_N^{(*)N}(n)]^T$ e $\mathbf{m} \triangleq [m_1, \dots, m_N]^T$. L'ampiezza e la fase della (2.106) sono l'ampiezza e la fase della componente sinusoidale alla frequenza $\tilde{\alpha}$ contenuta nel lag-product tempo discreto il cui valore atteso è il TCMF tempo discreto di ordine N .

La trasformata di Fourier N -dimensionale del CTCMF è

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}) \triangleq \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) e^{-j2\pi \mathbf{m}^T \boldsymbol{\nu}} \quad (2.107)$$

dove $\boldsymbol{\nu} \triangleq [\nu_1, \dots, \nu_N]^T$, è chiamato CSCMF di ordine N e può essere scritto come

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}') \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\tilde{\alpha} - \boldsymbol{\nu}'^T \mathbf{1} - r) \quad (2.108)$$

dove la funzione $\tilde{S}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}')$ è il RD-CSCMF di ordine N che può essere espresso come la trasformata discreta $(N-1)$ -dimensionale

$$\tilde{S}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}') = \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^{N-1}} \tilde{R}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}') e^{-j2\pi \mathbf{m}'^T \boldsymbol{\nu}'} \quad (2.109)$$

della RD-CTCMF di ordine N

$$\tilde{R}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}') \triangleq \tilde{R}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m})|_{m_N=0}. \quad (2.110)$$

Il TCCF tempo discreto di ordine N è definito in maniera analoga al caso tempo continuo; allora il CTCCF di ordine N è dato da

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}(n, \mathbf{m}) e^{-j2\pi \tilde{\beta} n} \quad (2.111)$$

La sua trasformata di Fourier è il CSCCF di ordine N

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{P}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\boldsymbol{\nu}') \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\tilde{\beta} - \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{1} - r) \quad (2.112)$$

dove $\tilde{P}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\boldsymbol{\nu}')$ è il CCP di ordine N che è la trasformata discreta di ordine $N-1$ del RD-CTCCF di ordine N

$$\tilde{C}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}') \triangleq \tilde{C}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m})|_{m_N=0}. \quad (2.113)$$

Valgono, inoltre, le seguenti relazioni di periodicità

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) = \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}+p}(\mathbf{m})|_{m_N=0}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (2.114)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}+p}(\boldsymbol{\nu} + \mathbf{q})|_{m_N=0}, \quad p \in \mathbb{Z}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^N \quad (2.115)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}) = \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}+p}(\mathbf{m})|_{m_N=0}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (2.116)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}+p}(\boldsymbol{\nu} + \mathbf{q})|_{m_N=0}, \quad p \in \mathbb{Z}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^N. \quad (2.117)$$

Analoghe proprietà valgono per i parametri a dimensione ridotta.

Capitolo 3

Segnali quasi ciclostazionari generalizzati

In questo capitolo saranno descritti i *segnali quasi ciclostazionari generalizzati* (*Generalized Almost-Cyclostationary Signals* (GACS)) (vedi [17], [18], [19], [20]) che costituiscono una classe di segnali di cui gli ACS sono un sottoinsieme, recentemente introdotti dai proff. Luciano Izzo ed Antonio Napolitano. Le funzioni statistiche delle serie temporali GACS sono funzioni quasi periodiche del tempo i cui sviluppi in serie di Fourier sono caratterizzati da coefficienti e frequenze che sono funzioni dei vettori ritardo delle serie temporali e l'unione, effettuata su tutti i possibili vettori ritardo, delle frequenze dipendenti dal ritardo non è sempre un insieme numerabile. I segnali ACS rappresentano un caso particolare di segnali GACS in quanto le frequenze dello sviluppo in serie di Fourier dei loro parametri statistici sono costanti. In molti problemi di stima un segnale può essere modellato come ACS oppure GACS in funzione della lunghezza dell'intervallo di osservazione; questo fatto pone limitazioni nelle prestazioni ottenute con alcuni algoritmi di elaborazione dei segnali adottati nelle comunicazioni dove segnali ACS sono elaborati da sistemi LAPTIV. Infatti, se l'intervallo di osservazione è incrementato per aumentare l'immunità agli effetti del rumore e dell'interferenza, può accadere che il modello ACS adottato per il segnale in ingresso non sia più valido e, quindi, sia necessario adottare un modello GACS, poichè piccole variazioni temporali dei parametri del segnale (non evidenti quando la lunghezza dell'intervallo di osservazione è inferiore) devono essere presi in considerazione. Per caratterizzare statisticamente i segnali GACS

sarà utilizzato l'approccio FOT introdotto nel capitolo precedente.

3.1 Caratterizzazione statistica del secondo ordine

Sia $x(t)$ una serie temporale a valori complessi; la sua funzione di autocorrelazione $E^{\{\alpha\}}\{x(t+\tau)x^*(t)\}$ può essere espressa come

$$\begin{aligned} E^{\{\alpha\}}\{x(t+\tau)x^*(t)\} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\tau} R_{xx^*}^\alpha(\tau) e^{j2\pi\alpha t} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{I}} R_{xx^*}^{(n)}(\tau) e^{j2\pi\alpha_n(\tau)t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove

$$\mathcal{A}_\tau \triangleq \{\alpha \in \mathbb{R} : R_{xx^*}^\alpha(\tau) \neq 0\} \quad (3.2)$$

ed $R_{xx^*}^\alpha(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione ciclica, introdotta nel capitolo precedente, definita come

$$R_{xx^*}^\alpha(\tau) \triangleq \langle x(t+\tau)x^*(t)e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t. \quad (3.3)$$

Nella (3.1) le frequenze $\alpha_n(\tau)$ sono dette *frequenze cicliche dipendenti dal ritardo* (*lag-dependent cycle frequencies*), mentre i coefficienti, detti *funzioni di autocorrelazione ciclica generalizzata* (*generalized cyclic autocorrelation functions*) sono dati da

$$R_{xx^*}^{(n)}(\tau) \triangleq \langle x(t+\tau)x^*(t)e^{-j2\pi\alpha_n(\tau)t} \rangle_t. \quad (3.4)$$

Se per qualche τ l'insieme \mathcal{A}_τ (3.2) non contiene soltanto l'elemento $\alpha = 0$, allora la serie temporale $x(t)$ è detta quasi *ciclostazionaria generalizzata in senso lato*. Si può dimostrare che esiste il seguente legame fra la funzione di autocorrelazione ciclica e la funzione di autocorrelazione ciclica generalizzata:

$$R_{xx^*}^\alpha(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{I}} R_{xx^*}^{(n)}(\tau) \delta_{\alpha - \alpha_n(\tau)} \quad (3.5)$$

dove δ_α è la delta di Kronecker. Dalla (3.5), per i segnali GACS, si ha

$$\mathcal{A}_\tau = \bigcup_{n \in \mathbb{I}} \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \alpha_n(\tau)\} \quad (3.6)$$

da cui deriva che il supporto della funzione $R_{xx^*}^\alpha(\tau)$ nel piano (α, τ) è costituito da un insieme numerabile di curve descritte dalle equazioni $\alpha = \alpha_n(\tau)$, $n \in \mathbb{I}$.

I segnali ACS sono un sottoinsieme della classe dei segnali GACS per i quali le frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo $\alpha_n(\tau)$ sono costanti rispetto a τ e sono uguali alle frequenze di ciclo. Inoltre, si ha che

$$\mathcal{A} \triangleq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau \quad (3.7)$$

è un insieme non numerabile per i segnali GACS che non sono ACS.

3.2 Caratterizzazione statistica di ordine superiore

Per caratterizzare statisticamente in senso lato, sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza, i segnali GACS saranno introdotti nuovi parametri statistici detti momenti e cumulanti ciclici generalizzati.

La serie temporale $x(t)$ a tempo continuo e a valori complessi è detta quasi ciclostazionaria generalizzata di ordine N (per la data configurazione di coniugazioni) se l'insieme

$$\mathcal{A}_\tau \triangleq \{\alpha \in \mathbb{R} : \mathcal{R}_x^\alpha(\tau) \neq 0\} \quad (3.8)$$

è numerabile per ogni $\tau \triangleq [\tau_1, \dots, \tau_N]^T$ con

$$\mathcal{R}_x^\alpha(\tau) \triangleq \left\langle \prod_{n=1}^N x^{(*)n}(t + \tau_n) e^{-j2\pi\alpha t} \right\rangle_t \quad (3.9)$$

che è il momento temporale ciclico di ordine N (CTMF) introdotto nel capitolo precedente.

Nel caso particolare in cui l'insieme

$$\mathcal{A} \triangleq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}^N} \mathcal{A}_\tau \quad (3.10)$$

è numerabile, la serie $x(t)$ è detta quasi ciclostazionaria in senso lato di ordine N .

Per la proprietà di numerabilità degli insiemi \mathcal{A}_τ per ogni τ , il supporto nello spazio (α, τ) dei CTMF è costituito da un insieme di *manifold* N -dimensionali definiti dalle seguenti equazioni implicite:

$$\phi_{\zeta'}(\alpha, \tau) = 0, \quad \zeta' \in W', \quad (3.11)$$

con W' insieme numerabile. Si ha, quindi, che

$$\begin{aligned} \text{supp} \{ \mathcal{R}_x^\alpha(\tau) \} &\stackrel{\Delta}{=} \text{cl} \{ (\alpha, \tau) \in \mathcal{A}_\tau \times \mathbb{R}^N : \mathcal{R}_x^\alpha(\tau) \neq 0 \} \\ &= \text{cl} \bigcup_{\zeta' \in W'} \left\{ (\alpha, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : \phi_{\zeta'}(\alpha, \tau) = 0, \mathcal{R}_x^\alpha(\tau) \neq 0 \right\} \\ &= \text{cl} \bigcup_{\zeta \in W} \{ (\alpha, \tau) \in \mathbb{R} \times D_\zeta : \alpha = \alpha_\zeta(\tau) \} \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove cl indica chiusura, W è un insieme numerabile e, nell'ultima uguaglianza, ogni *manifold* descritto dall'equazione implicita $\phi_{\zeta'}(\alpha, \tau) = 0$ è stato decomposto in un insieme numerabile di *manifold* ognuno descritto dall'equazione esplicita $\alpha = \alpha_\zeta(\tau)$. La funzione $\alpha_\zeta(\tau)$, chiamata *frequenza di ciclo dipendente dal ritardo di ordine N relativa al momento (N th-order (moment) lag-dependent cycle frequency)* è definita in $D_\zeta \subseteq \mathbb{R}^N$ e non è necessariamente una funzione continua di τ .

L'insieme \mathcal{A}_τ può essere scritto in questo modo:

$$\mathcal{A}_\tau = \bigcup_{\zeta \in W} \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \alpha_\zeta(\tau) \} \quad (3.13)$$

dove le frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo e relative al momento $\alpha_\zeta(\tau)$ sono tali che per ogni $(\alpha, \tau) \in \mathcal{A}_\tau \times \mathbb{R}^N$ esiste un solo $\zeta \in W$ tale che $\alpha = \alpha_\zeta(\tau)$.

Introduciamo i momenti temporali ciclici generalizzati partendo dal momento temporale che, nell'ipotesi di quasi ciclostazionarietà generalizzata della serie temporale $x(t)$, può essere scritto in questo

modo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\tau}) &\triangleq \mathbb{E}^{\{\mathcal{A}_{\boldsymbol{\tau}}\}} \left\{ \prod_{n=1}^N x^{(*)n}(t + \tau_n) \right\} \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{\tau}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\alpha t} \\
 &= \sum_{\zeta \in W} \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau})t} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza la funzione momento temporale è espressa in termini di espansione in serie di Fourier e la somma si estende su un insieme W che non dipende da $\boldsymbol{\tau}$, mentre le frequenze dipendono da $\boldsymbol{\tau}$. Le funzioni $\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau})$ presenti nella (3.14) sono dette momenti ciclici generalizzati (GCTMFs) e sono date da

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \begin{cases} \left\langle \prod_{n=1}^N x^{(*)n}(t + \tau_n) e^{-j2\pi\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau})t} \right\rangle_t, & \forall \boldsymbol{\tau} \in D_{\zeta} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.15)$$

e non sono necessariamente funzioni continue di $\boldsymbol{\tau}$.

Nella (3.13) si è assunto che $\forall \boldsymbol{\tau}$ si abbia che $\alpha_{\zeta_1}(\boldsymbol{\tau}) \neq \alpha_{\zeta_2}(\boldsymbol{\tau})$ per $\zeta_1 \neq \zeta_2$; se risulta che K funzioni sono definite in K intorni, detti I_1, \dots, I_K , non necessariamente distinti, dello stesso punto $\boldsymbol{\tau}_0$, e solamente una è definita in $\boldsymbol{\tau}_0$ e inoltre risulta che

$$\lim_{\substack{\Delta \boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta \boldsymbol{\tau} \in I_k}} \alpha_{\zeta_k}(\boldsymbol{\tau}_0 + \Delta \boldsymbol{\tau}) = \alpha_0, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.16)$$

si considera $\alpha_{\zeta_1}(\boldsymbol{\tau}_0) = \dots = \alpha_{\zeta_K}(\boldsymbol{\tau}_0) = \alpha_0$ e

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta_k}(\boldsymbol{\tau}_0) \triangleq \lim_{\substack{\Delta \boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta \boldsymbol{\tau} \in I_k}} \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta_k}(\boldsymbol{\tau}_0 + \Delta \boldsymbol{\tau}), \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.17)$$

L'insieme dei punti $\boldsymbol{\tau}_0$ per i quali vale la (3.16) per qualche $\zeta_k \in W$ sarà chiamato $\mathbb{D}_{\mathbf{x}}$ e si assume che sia numerabile. Si può dimostrare che per i CTMF e i GTMF vale la seguente relazione:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\zeta \in W} \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) \delta_{\alpha - \alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau})} \quad (3.18)$$

da cui deriva che la funzione $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}_1)e^{j2\pi\alpha t}$ rappresenta la somma di tutte le sinusoidi con frequenza α contenute nella (3.14) quando $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1$. Si ha inoltre che $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}_{\zeta} - \mathbb{D}_{\mathbf{x}}$

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau})|_{\alpha=\alpha_{\zeta}}(\boldsymbol{\tau}). \quad (3.19)$$

Per le serie temporali GACS che non sono ACS, anche se l'insieme $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\tau}}$ e $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau})$ sono funzioni continue del vettore $\boldsymbol{\tau}$, i CTMFs non sono necessariamente funzioni continue di $\boldsymbol{\tau}$. In particolare, come si può notare dalla (3.18) i CTMFs possono essere dati da somme di funzioni delta di Kronecker.

Per ogni $\boldsymbol{\Delta}$ reale si ha che

$$\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{1}\boldsymbol{\Delta}) = \alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau}) \quad (3.20)$$

da cui deriva che

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{1}\boldsymbol{\Delta}) = \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau})e^{j2\pi\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\Delta}}. \quad (3.21)$$

Dalle (3.14) e (3.21) segue che la funzione momento temporale è funzione di $\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}$ e

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\zeta \in W} \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{1}t) \equiv \mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}). \quad (3.22)$$

Dalle (3.20) e (3.21) si deduce che è possibile introdurre i parametri a dimensione ridotta senza che ci sia alcuna perdita di informazione. Si possono definire le *frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo relative ai momenti a dimensione ridotta*

$$\bar{\alpha}_{\zeta}(\boldsymbol{\tau}') \triangleq \alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau})|_{\tau_N=0} \quad (3.23)$$

e i *GTCMFs di ordine N a dimensione ridotta (RD-GCTMFs)*

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}') \triangleq \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau})|_{\tau_N=0}. \quad (3.24)$$

Nel caso particolare dei segnali ACS le funzioni $\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau})$ sono indipendenti da $\boldsymbol{\tau}$ e si ha, quindi, una corrispondenza uno a uno fra gli elementi ζ appartenenti a W e le frequenze di ciclo α appartenenti all'insieme numerabile \mathcal{A} ; inoltre, per ogni α e ζ tali che $\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau}) = \alpha$, si ha che

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) \quad (3.25)$$

cioè per le serie temporali ACS la funzione momento temporale ciclico generalizzato coincide con la funzione momento temporale ciclico.

Si dice che un segnale $x(t)$ contiene una componente ACS se esiste almeno una frequenza di ciclo dipendente dal ritardo $\alpha_\zeta(\tau)$ che assume un valore costante all'interno di un insieme con misura di Lebesgue non nulla in \mathbb{R}^N .

3.2.1 Caratterizzazione spettrale

I segnali GACS che non appartengono all'insieme degli ACS non possono essere caratterizzati nel dominio spettrale dalle funzioni momenti spettrali ciclici (CSMF) di ordine N a dimensione ridotta $S_x^\alpha(\mathbf{f}')$, introdotti nel capitolo precedente, in quanto tali funzioni possono essere infinitesime.

Si introduce la trasformata di ordine N del GCTMF

$$S_{x,\zeta}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{R}_{x,\zeta}(\boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \quad (3.26)$$

che è detta *funzione momento spettrale ciclico generalizzato di ordine N (GCSMF)*.

Sia

$$S_x(\mathbf{f}) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} E^{\{\Lambda_0\}} \left\{ \prod_{n=1}^N X_T^{(*)n}(t, (-)_n f_n) \right\} \quad (3.27)$$

la funzione momento spettrale di ordine N con

$$X_T(t, f) \triangleq \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u) e^{-j2\pi f u} du \quad (3.28)$$

e Λ_0 l'insieme delle possibili frequenze di ciclo della serie temporale $X_T(t, f)$ con $T \rightarrow \infty$. Si può dimostrare [17] che Λ_0 contiene solo l'elemento $\alpha = 0$ e che esiste la seguente relazione fra la funzione momento spettrale e i GCSMF:

$$S_x(\mathbf{f}) = \sum_{\zeta \in W} S_{x,\zeta}(\mathbf{f}). \quad (3.29)$$

Considerando, poi la (3.14) e la (3.26) con $t = 0$, dalla (3.29) si ottiene

$$S_x(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{R}_x(\boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau}. \quad (3.30)$$

Si può dimostrare che i GCSMF delle serie temporali GACS non contenenti alcuna componente ACS sono non impulsivi, a differenza di quelli delle serie ACS [18].

Per le serie temporali ACS c'è una corrispondenza uno a uno fra gli elementi $\zeta \in W_x$ e le frequenze di ciclo $\alpha \in \mathcal{A}_x$ e inoltre i GCSMF sono coincidenti con i momenti spettrali ciclici.

3.2.2 Cumulanti ciclici generalizzati: parametri temporali e spettrali

La definizione di funzioni cumulanti temporali di ordine N di una serie temporale a valori complessi e tempo continuo per i segnali GACS è analoga a quelle delle serie temporali ACS introdotta nel capitolo precedente. La funzione cumulante temporale è quasi periodica in t per i segnali GACS ed è data da

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\beta \in B_{\boldsymbol{\tau}}} \mathcal{C}_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\beta t} \quad (3.31)$$

con

$$B_{\boldsymbol{\tau}} \triangleq \left\{ \beta \in \mathbb{R} : \mathcal{C}_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}) \neq 0 \right\} \quad (3.32)$$

insieme numerabile $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^N$ e dove

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \left\langle \mathcal{C}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi\beta t} \right\rangle_t \quad (3.33)$$

è la funzione cumulante temporale ciclico di ordine N (CTCF). Il supporto dei CTCF nello spazio $(\beta, \boldsymbol{\tau})$ è costituito da un insieme di *manifold* N -dimensionali descritti dalle equazioni esplicite

$$\beta = \beta_{\xi}(\boldsymbol{\tau}), \quad \xi \in W_C \quad (3.34)$$

dove W_C è un insieme numerabile e le frequenze $\beta_{\xi}(\boldsymbol{\tau})$, dette *frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo relative ai cumulanti di ordine N* , non sono necessariamente funzioni continue di $\boldsymbol{\tau}$. Per ogni $\boldsymbol{\tau}$ si ha

$$B_{\boldsymbol{\tau}} = \bigcup_{\xi \in W_C} \{ \beta \in \mathbb{R} : \beta = \beta_{\xi}(\boldsymbol{\tau}) \} \quad (3.35)$$

e la funzione quasi periodica $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})$ può essere scritta come

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\xi \in W_C} \mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\beta_{\xi}(\boldsymbol{\tau})t} \quad (3.36)$$

con le funzioni $\mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau})$, *funzioni cumulanti temporali ciclici generalizzati di ordine N (GCTCF)*, date da

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \begin{cases} \langle \mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi\beta_\xi(\boldsymbol{\tau})t} \rangle_t, & \forall \boldsymbol{\tau} \in D_\xi \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.37)$$

con l'insieme D_ξ che è il dominio della funzione $\beta_\xi(\boldsymbol{\tau})$. Nella (3.35) si è assunto che $\forall \boldsymbol{\tau}$ si abbia che $\beta_{\xi_1}(\boldsymbol{\tau}) \neq \beta_{\xi_2}(\boldsymbol{\tau})$ per $\xi_1 \neq \xi_2$; se risulta che K funzioni $\beta_{\xi_1}(\boldsymbol{\tau}), \dots, \beta_{\xi_K}(\boldsymbol{\tau})$ sono definite in K intorni, detti I_1, \dots, I_K , non necessariamente distinti, dello stesso punto $\boldsymbol{\tau}_0$, e solamente una è definita in $\boldsymbol{\tau}_0$ e, inoltre, risulta che

$$\lim_{\substack{\Delta\boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\boldsymbol{\tau} \in I_k}} \beta_{\xi_k}(\boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\boldsymbol{\tau}) = \beta_0, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.38)$$

si considera $\beta_{\xi_1}(\boldsymbol{\tau}_0) = \dots = \beta_{\xi_K}(\boldsymbol{\tau}_0) = \beta_0$ e

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi_k}(\boldsymbol{\tau}_0) \triangleq \lim_{\substack{\Delta\boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\boldsymbol{\tau} \in I_k}} \mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi_k}(\boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\boldsymbol{\tau}), \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.39)$$

L'insieme di punti $\boldsymbol{\tau}_0$ per i quali vale la (3.38) per qualche $\xi_k \in W_C$ è detto \mathbb{D}'_x e si assume essere numerabile.

Si dimostra che i CTCF e i GCTCF sono legati dalla relazione

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}^\beta(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\xi \in W_C} \mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi_k}(\boldsymbol{\tau}) \delta_{\beta - \beta_\xi(\boldsymbol{\tau})}. \quad (3.40)$$

Inoltre, $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}_\xi - \mathbb{D}'_x$ si ha

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi_k}(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{C}_{\mathbf{x}}^\beta(\boldsymbol{\tau}) \Big|_{\beta - \beta_\xi(\boldsymbol{\tau})}. \quad (3.41)$$

Per qualsiasi numero reale Δ si ha che

$$B_{\boldsymbol{\tau} + \mathbf{1}\Delta} \equiv B_{\boldsymbol{\tau}} \quad (3.42)$$

da cui deriva che

$$\beta_\xi(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{1}\Delta) = \beta_\xi(\boldsymbol{\tau}) \quad (3.43)$$

e

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{1}\Delta) = \mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\beta_\xi(\boldsymbol{\tau})\Delta}. \quad (3.44)$$

Il GCTCF a dimensione ridotta di ordine N (RD-GCTCF) è dato da

$$C_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}') \triangleq C_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau})|_{\tau_N=0} \quad (3.45)$$

e le frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo relative ai cumulanti a dimensione ridotta sono date da

$$\bar{\beta}_\xi(\boldsymbol{\tau}') \triangleq \beta_\xi(\boldsymbol{\tau})|_{\tau_N=0}. \quad (3.46)$$

Per le serie temporali ACS tali che $x(t)$ e $x(t + \tau)$ sono asintoticamente indipendenti ($|\tau| \rightarrow \infty$) la funzione cumulante temporale ciclico a dimensione ridotta $C_{\mathbf{x}}^\beta(\boldsymbol{\tau}')$ è sommabile, mentre la funzione momento temporale ciclico a dimensione ridotta $R_{\mathbf{x}}^\alpha(\boldsymbol{\tau}')$ in generale non lo è; analoga proprietà vale anche per le serie temporali GACS.

La trasformata di ordine N del GCTCF di una serie temporale $x(t)$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x},\xi}(\mathbf{f}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^N} C_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \quad (3.47)$$

è detta *funzione cumulante spettrale ciclico generalizzato di ordine N (GCSCF)*.

La trasformata di Fourier di ordine $N - 1$ di $C_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}')$ è chiamata *polispettro ciclico generalizzato di ordine N* . In ipotesi di asintotica indipendenza della serie temporale $x(t)$ il RD-GCTCF è assolutamente integrabile e trasformabile secondo Fourier nel senso ordinario.

La funzione cumulante spettrale di ordine N è

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cum} \left\{ X_T^{(*)n}(t, (-)_n f_n), n = 1, \dots, N \right\} \quad (3.48)$$

che può essere scritta anche nel modo seguente:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^N} C_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau}. \quad (3.49)$$

La funzione cumulante spettrale può essere espressa in termini di GCSCF considerando la relazione

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \sum_{\xi \in W_C} \mathcal{P}_{\mathbf{x},\xi}(\mathbf{f}). \quad (3.50)$$

Per i segnali ACS i GCSCF sono coincidenti con le funzioni cumulanti spettrali ciclici.

3.3 Stimatori delle statistiche cicliche generalizzate

Stimatori delle statistiche cicliche dei segnali ACS sono stati proposti in [9] e [36]. In [23] è stato affrontato il problema della stima delle statistiche cicliche generalizzate di ordine superiore per i segnali GACS che non sono ACS.

Si assuma che $\tau \in D_\zeta$ e $\tau \notin D_{\zeta'}$ per qualsiasi $\zeta \neq \zeta'$ e che sia nota la frequenza di ciclo dipendente dal ritardo $\alpha_\zeta(\tau)$. Risulta che uno stimatore di GCTMF è

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}_T, \zeta}(t_0, \tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \prod_{n=1}^N \text{rect}\left(\frac{u - t_0}{T}\right) x^{(*)n}(u + \tau_n) e^{-j2\pi\alpha_\zeta(\tau)u} du \quad (3.51)$$

con $\text{rect}(t) = 1$ per $|t| < 1/2$ e $\text{rect}(t) = 0$ altrove, con T tempo di osservazione. Si ha, inoltre, che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{\mathbf{x}_T, \zeta}(t_0, \tau) = \mathcal{R}_{\mathbf{x}, \zeta}(\tau) \quad (3.52)$$

dove la convergenza è in media quadratica.

Se si assume che $\tau \in D_\xi$ e $\tau \notin D_{\xi'}$ per qualsiasi $\xi \neq \xi'$, si ha che la funzione

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}_T, \xi}(t_0, \tau) \triangleq \sum_P \left[(-1)^{p-1} (p-1)! \sum_{\zeta \in \mathbf{W}} \prod_{i=1}^p \mathcal{R}_{\mathbf{x}_{T_{\mu i}}, \zeta_i}(t_0, \tau_{\mu i}) \delta_{\beta_\xi(\tau) - \alpha_\zeta(\tau)^T} \mathbf{1} \right] \quad (3.53)$$

converge al GCTCF per $T \rightarrow \infty$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}_T, \xi}(t_0, \tau) = \mathcal{C}_{\mathbf{x}, \xi}(\tau). \quad (3.54)$$

Quando l'insieme delle frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo $\{\alpha_\zeta(\tau)\}_{\zeta \in \mathbf{W}}$ non è noto, esso si può ottenere partendo dal supporto

$$\text{supp} \{ \mathcal{R}_{\mathbf{x}_T}^\alpha(t_0, \tau) \} \triangleq \text{cl} \{ (\alpha, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : \mathcal{R}_{\mathbf{x}_T}^\alpha(t_0, \tau) \neq 0 \} \quad (3.55)$$

dove

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}_T}^\alpha(t_0, \tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \prod_{n=1}^N \text{rect}\left(\frac{u - t_0}{T}\right) x^{(*)n}(u + \tau_n) e^{-j2\pi\alpha u} du \quad (3.56)$$

è lo stimatore del CTMF introdotto in [36]. Infatti per $T \rightarrow \infty$ il supporto (3.55) ha misura nulla in \mathbb{R}^{N+1} ed è costituito da un insieme numerabile di *manifold* descritti dalle equazioni $\alpha = \alpha_\zeta(\boldsymbol{\tau})$, $\zeta \in W$. Le stime delle frequenze di ciclo possono essere sostituite ai valori veri nelle espressioni degli stimatori se il massimo errore assoluto è più piccolo della risoluzione della frequenza di ciclo $1/T$.

Per i parametri spettrali la funzione

$$\mathcal{S}_{\mathbf{x}_T, \zeta}(t_0, \mathbf{f})_Z \triangleq \frac{1}{Z} \int_{t_0-Z/2}^{t_0+Z/2} \left[\prod_{n=1}^N X_T^{(*)n}(t, (-)_n f_n) \otimes_{\mathbf{f}} \mathcal{A}_\zeta(t, \mathbf{f}) \right] e^{j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{1} t} dt \quad (3.57)$$

è uno stimatore di GCSMF con

$$\mathcal{A}_\zeta(t, \mathbf{f}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-j2\pi \alpha_\zeta(\boldsymbol{\tau}) t} e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \quad (3.58)$$

e si ha

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{Z \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{\mathbf{x}_T, \zeta}(t_0, \mathbf{f})_Z = \mathcal{S}_{\mathbf{x}, \zeta}(\mathbf{f}). \quad (3.59)$$

3.4 Esempi di segnali GACS

In questo paragrafo saranno esaminati due esempi di segnali GACS: il segnale chirp, che è largamente utilizzato in molte applicazioni, in fisica, sonar, radar e nelle comunicazioni, ed un segnale campionato in maniera non uniforme.

3.4.1 Segnale chirp

Consideriamo il segnale chirp

$$x(t) \triangleq \exp(j\pi c t^2) \quad (3.60)$$

dove il parametro c non nullo è il *chirp rate*. La funzione momento temporale ciclico alla frequenza di ciclo α si ottiene sostituendo la (3.60) nella (3.9):

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^\alpha(\boldsymbol{\tau}) = \exp(j\pi c \mathbf{1}^{(-)T} \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \delta_{\alpha - c \mathbf{1}^{(-)T} \boldsymbol{\tau}} \delta_{\mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1}} \quad (3.61)$$

dove $\mathbf{1}^{(-)} \triangleq [(-)_1 1, \dots, (-)_N 1]^T$ e $\boldsymbol{\tau}^{(2)} \triangleq [\tau_1^2, \dots, \tau_N^2]^T$. Dalla (3.61) si deduce che il CTMF è non nullo solo quando il numero di elementi coniugati e non coniugati del vettore \mathbf{x} è lo stesso ed inoltre solo sull'iperpiano

nello spazio $(\alpha, \boldsymbol{\tau})$ definito dall'equazione

$$\alpha = c\mathbf{1}^{(-)T}\boldsymbol{\tau}. \quad (3.62)$$

Quindi, poichè l'insieme dei punti $\boldsymbol{\tau}$ per i quali vale la (3.62) è un insieme che ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^N , i CSMF sono infinitesimi.

I momenti spettrali ciclici generalizzati forniscono una valida caratterizzazione spettrale per i segnali chirp. Confrontando la (3.61) con la (3.18), risulta che l'insieme W contiene un solo elemento e

$$\alpha_\zeta(\boldsymbol{\tau}) = c\mathbf{1}^{(-)T}\boldsymbol{\tau} \quad (3.63)$$

e

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) = \exp\left(j\pi c\mathbf{1}^{(-)T}\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \delta_{\mathbf{1}^{(-)T}\mathbf{1}} \quad (3.64)$$

che è non nullo solo quando N è pari e il numero di elementi coniugati e non del vettore \mathbf{x} è lo stesso. Il GCSMF è dato da

$$\mathcal{S}_{\mathbf{x},\zeta}(\mathbf{f}) = \frac{1}{|c|^{N/2}} \exp\left(-j\frac{\pi}{c}\mathbf{1}^{(-)T}\mathbf{f}^{(2)}\right) \delta_{\mathbf{1}^{(-)T}\mathbf{1}} \quad (3.65)$$

con $\mathbf{f}^{(2)} \triangleq [f_1^2, \dots, f_N^2]$.

Per i cumulanti ciclici generalizzati si ha che l'insieme W_C contiene un solo elemento e

$$\beta_\xi(\boldsymbol{\tau}) = c\mathbf{1}^{(-)T}\boldsymbol{\tau} \quad (3.66)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{x},\xi}(\boldsymbol{\tau}) &= \exp\left(j\pi c\mathbf{1}^{(-)T}\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \\ &\sum_P \left[(-1)^{p-1} (p-1)! \prod_{i=1}^p \delta_{\mathbf{1}_{\mu_i}^{(-)T}\mathbf{1}_{\mu_i}} \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

I RD-GCTCF del segnale chirp non convergono a zero per $\|\boldsymbol{\tau}'\| \rightarrow \infty$ poichè le serie temporali $x(t)$ e $x(t + \tau_n)$ non sono asintoticamente indipendenti.

3.4.2 Segnale campionato non uniformemente

Un segnale uniformemente campionato può essere modellato come il prodotto di un segnale a tempo continuo per un treno di impulsi con periodo costante; se il segnale a tempo continuo è ACS ed è strettamente limitato in banda, le sue proprietà ciclostazionarie possono essere facilmente determinate nell'ipotesi che la frequenza di campionamento sia sufficientemente elevata ([16]), ([22]). In un modello più realistico si considerano treni di impulsi spazati in maniera non uniforme con un periodo non costante nel tempo. Consideriamo il segnale campionato non uniformemente

$$x(t) \triangleq w(t)s(t) \quad (3.68)$$

dove

$$s(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_p(t)) \quad (3.69)$$

è un treno di impulsi il cui periodo $T_p(t)$ è una funzione di t lentamente variabile e $w(t)$ è una serie temporale tale che $\mathcal{R}_w^\alpha(\tau) \neq 0$ solo per $\alpha = 0$.

Usando la formula di Poisson

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_p(u)) = \frac{1}{T_p(u)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi mt/T_p(u)} \quad (3.70)$$

nel caso $t = u$ si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s^\alpha(\tau) &= \left\langle \prod_{n=1}^N f_p(t + \tau_n) \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \right. \\ &\quad \left. \exp \left[j2\pi \left(\sum_{n=1}^N (-)_n m_n f_p(t + \tau_n) \cdot (t + \tau_n) - \alpha t \right) \right] \right\rangle_t \end{aligned} \quad (3.71)$$

dove $f_p(t) \triangleq 1/T_p(t)$ e $\mathbf{m} \triangleq [m_1, \dots, m_N]^T$. Dalla (3.71) non è possibile ricavare in maniera semplice l'espressione analitica delle frequenze dipendenti dal ritardo che possono essere stimate seguendo lo stesso approccio indicato nel paragrafo (3.3). Dalla stazionarietà in senso lato di $w(t)$ le frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo del segnale $x(t)$ sono le stesse di $s(t)$ e il GCTMF di $x(t)$ è

$$\mathcal{R}_{x,\zeta}(\tau) = \mathcal{R}_w^0(\tau) \mathcal{R}_{s,\zeta}(\tau). \quad (3.72)$$

Quando la massima variazione delle frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo non è più grande della risoluzione delle frequenze di ciclo $1/T$, con T pari alla lunghezza dell'intervallo di osservazione, allora il periodo di campionamento si può considerare costante e il segnale può essere modellato come ACS piuttosto che GACS.

3.5 Trasformazioni lineari tempo varianti dei segnali GACS

Le serie temporali in molti problemi di interesse nell'ambito delle elaborazioni dei segnali e delle comunicazioni subiscono delle trasformazioni che possono essere modellate come sistemi lineari tempo varianti stocastici o deterministici. Un sistema deterministico opera solo sulla variabile temporale e considera come una costante la variabile appartenente allo spazio campione, trasformando un segnale in ingresso deterministico in un segnale in uscita deterministico; un sistema stocastico opera sia sulla variabile temporale che sulla variabile appartenente allo spazio campione, trasformando segnali in ingresso deterministici in segnali in uscita stocastici. Il problema del filtraggio lineare è stato considerato in [18] e [19] adottando l'approccio FOT per caratterizzare in maniera utile il segnale in uscita ad un sistema lineare fluttuante in maniera aleatoria che, nell'approccio stocastico tradizionale, fornirebbe in uscita segnali non ergodici. La perdita di ergodicità di un segnale in uscita ad un sistema LTV nell'approccio stocastico costituisce una delle più importanti motivazioni dell'introduzione dell'approccio FOT per analizzare il filtraggio LTV. Un processo stocastico si dice ergodico per la funzione momento temporale stocastico se tale funzione è uguale alla funzione momento temporale di ogni realizzazione del processo (analogo discorso può essere fatto per la funzione cumulante). I sistemi stocastici trasformano, in generale, processi stocastici ergodici in ingresso in processi stocastici non ergodici in uscita, in quanto le relazioni ingresso-uscita nell'approccio stocastico non coincidono con le analoghe relazioni che coinvolgono gli stimatori.

3.5.1 Sistemi FOT deterministici e aleatori

Nell'approccio FOT un sistema deterministico è definito come un sistema eventualmente complesso, non necessariamente lineare, che per ogni

segnale deterministico (cioè quasi periodico) in ingresso presenta in uscita un segnale deterministico. Sistemi che non sono FOT deterministici saranno chiamati FOT aleatori. Dato in ingresso il segnale

$$x(t) = e^{j2\pi\lambda t} \quad (3.73)$$

un sistema FOT deterministico ha in uscita il segnale quasi periodico

$$y(t) = \sum_{n \in E_\lambda} G'_n e^{j2\pi n t} \quad (3.74)$$

dove, per ogni frequenza in ingresso λ fissata, si ha che l'insieme delle frequenze di uscita $E_\lambda \triangleq \{\eta_1(\lambda), \dots, \eta_n(\lambda) \dots\}$ è un insieme numerabile e G'_η sono coefficienti complessi.

L'insieme dei punti $(\eta, \lambda) \in E_\lambda \times \mathbb{R}$ tali che $G'_\eta \neq 0$ è costituito da un insieme di curve non necessariamente continue definite dalle equazioni implicite

$$\phi_{\sigma'}(\eta, \lambda) = 0, \quad \sigma' \in \Omega' \quad (3.75)$$

con Ω' insieme numerabile. Si ha che

$$\begin{aligned} & \text{cl}\{(\eta, \lambda) \in E_\lambda \times \mathbb{R} : G'_\eta \neq 0\} \\ &= \text{cl} \bigcup_{\sigma' \in \Omega'} \{(\eta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \phi_{\sigma'}(\eta, \lambda) = 0, G'_\eta \neq 0\} \\ &= \text{cl} \bigcup_{\sigma \in \Omega} \{(\eta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}_{\varphi_\sigma} : \eta = \varphi_\sigma(\lambda)\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

con Ω insieme numerabile, $\mathcal{D}_{\varphi_\sigma}$ dominio della funzione $\varphi_\sigma(\cdot)$, che può essere scelta fra le funzioni monotone reali tali che $\varphi_\sigma(\lambda) \neq \varphi_{\sigma'}(\lambda)$ per $\sigma \neq \sigma'$. La serie temporale in uscita al sistema può essere scritta anche in questo modo:

$$y(t) = \sum_{\sigma \in \Omega} G_\sigma(\lambda) e^{j2\pi\varphi_\sigma(\lambda)t}. \quad (3.77)$$

Le funzioni $G_\sigma(\lambda)$ sono date da

$$G_\sigma(\lambda) \triangleq \begin{cases} G'_\eta|_{\eta=\varphi_\sigma(\lambda)}, & \lambda \in \mathcal{D}_{\varphi_\sigma} \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases} \quad (3.78)$$

Per un dato sistema le funzioni $\varphi_\sigma(\cdot)$ e $G_\sigma(\cdot)$ non sono univocamente determinate poichè per le curve descritte da un'equazione implicita sono possibili molte decomposizioni in curve descritte da equazioni esplicite. Inoltre, se più funzioni $\varphi_{\sigma_i}(\cdot)$ sono definite in K intorno non necessariamente coincidenti dello stesso punto λ_0 , aventi tutte lo stesso limite φ_0 per $\lambda \rightarrow \lambda_0$, e solo una è definita in λ_0 , allora si assume

$$\varphi_{\sigma_1}(\lambda_0) = \dots = \varphi_{\sigma_k}(\lambda_0) = \varphi_0 \quad (3.79)$$

e si definisce

$$G_{\sigma_i}(\lambda_0) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} G_{\sigma_i}(\lambda), \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.80)$$

Sono state fatte le seguenti ipotesi di regolarità: piccoli cambiamenti nelle frequenze di ingresso generano piccoli cambiamenti nelle frequenze di uscita $\eta_n(\lambda) \in E_\lambda$, in maniera tale che l'insieme E_λ è continuo rispetto a λ e le funzioni $\phi_{\sigma'}(\eta, \lambda)$ e $\varphi_\sigma(\lambda)$ sono continue nei loro domini.

Dato un sistema lineare tempo variante, la relazione ingresso-uscita è data da

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, u) x(u) du \quad (3.81)$$

dove $h(t, u)$ è la risposta impulsiva del sistema. La relazione ingresso-uscita nel dominio della frequenza si ottiene trasformando la (3.81):

$$\begin{aligned} Y(f) &\triangleq \int_{\mathbb{R}} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(f, \lambda) X(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.82)$$

dove $H(f, \lambda)$ è la funzione di trasmissione ed è data dalla doppia trasformata di Fourier della risposta impulsiva del sistema:

$$H(f, \lambda) \triangleq \int_{\mathbb{R}^2} h(t, u) e^{-j2\pi(ft - \lambda u)} dt du. \quad (3.83)$$

Trasformando secondo Fourier il lato destro dell'equazione (3.77), si ha

$$H(f, \lambda) = \sum_{\sigma \in \Omega} G_\sigma(\lambda) \delta(f - \varphi_\sigma(\lambda)) \quad (3.84)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Omega} H_\sigma(\lambda) \delta(f\lambda - \psi_\sigma(f)) \quad (3.85)$$

dove $\psi_\sigma(f)$ sono le funzioni inverse delle $\varphi_\sigma(\lambda)$ e $G_\sigma(\lambda)$ e $H_\sigma(\lambda)$ sono legate dalle seguenti relazioni:

$$H_\sigma(f) = |\dot{\psi}_\sigma(f)| G_\sigma(\psi_\sigma(f)) \quad (3.86)$$

$$G_\sigma(\lambda) = |\dot{\varphi}_\sigma(\lambda)| H_\sigma(\varphi_\sigma(\lambda)) \quad (3.87)$$

con $\dot{\psi}_\sigma(f)$ e $\dot{\varphi}_\sigma(\lambda)$ uguali alle derivate prima di $\psi_\sigma(f)$ e $\varphi_\sigma(\lambda)$, rispettivamente. Dalle (3.84), (3.85) segue che la funzione risposta impulsiva di un sistema lineare FOT deterministico può essere espressa come

$$h(t, u) = \sum_{\sigma \in \Omega} \int_{\mathbb{R}} G_\sigma(\lambda) e^{j2\pi\varphi_\sigma(\lambda)t} e^{-j2\pi\lambda u} d\lambda \quad (3.88)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Omega} \int_{\mathbb{R}} H_\sigma(f) e^{-j2\pi\psi_\sigma(f)u} e^{-j2\pi ft} df. \quad (3.89)$$

Sostituendo le (3.84), (3.85) nelle (3.82) si ottiene la relazione ingresso-uscita di un sistema lineare FOT deterministico nel dominio della frequenza:

$$Y(f) = \sum_{\sigma \in \Omega} \int_{\mathbb{R}} G_\sigma(\lambda) \delta(f - \varphi_\sigma(\lambda)) X(\lambda) d\lambda \quad (3.90)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Omega} H_\sigma(f) X(\psi_\sigma(f)) \quad (3.91)$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = \sum_{\sigma \in \Omega} \int_{\mathbb{R}} G_\sigma(\lambda) X(\lambda) e^{j2\pi\varphi_\sigma(\lambda)t} d\lambda \quad (3.92)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Omega} h_\sigma(t) \otimes x_{\psi_\sigma}(t) \quad (3.93)$$

con

$$x_{\psi_\sigma}(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} X(\psi_\sigma(f)) e^{j2\pi ft} df. \quad (3.94)$$

Dalla (3.92) si deduce che l'uscita di un sistema LTV FOT è una versione compressa o espansa in frequenza e poi filtrata dell'ingresso. Per i sistemi LAPTV si ha che le funzioni $\psi_\sigma(f)$ sono lineari con pendenza unitaria, cioè

$$\psi_\sigma(f) = f - \sigma, \quad \sigma \in \Omega \quad (3.95)$$

mentre per la risposta impulsiva si ha

$$h(t, u) = \sum_{\sigma \in \Omega} h_{\sigma}(t - u) e^{j2\pi\sigma u}. \quad (3.96)$$

Il sistema che realizza la scalatura temporale è un sistema FOT deterministico la cui risposta impulsiva è data da

$$h(t, u) = \delta(u - st) \quad (3.97)$$

dove $s \neq 0$ è il fattore di scala e l'insieme Ω contiene un solo elemento,

$$\psi_{\sigma}(f) = \frac{f}{s} \quad (3.98)$$

$$H_{\sigma}(f) = \frac{1}{|s|}. \quad (3.99)$$

3.5.2 Decomposizione della risposta impulsiva di un sistema LTV FOT aleatorio

Tra i sistemi lineari tempo varianti che non possono essere modellati come FOT deterministici ci sono i modulatori chirp, i modulatori la cui portante è una sequenza pseudo-casuale, i canali che introducono ritardi tempo varianti ed i sistemi che realizzano una finestratura temporale. Tali sistemi non hanno in uscita un segnale quasi periodico quando hanno in ingresso una sinusoide.

Nell'approccio FOT una serie temporale GACS può essere decomposta in una componente deterministica ed in una puramente aleatoria:

$$\begin{aligned} x(t) &\triangleq E^{\{\alpha\}}\{x(t)\} + x_r(t) \\ &= x_p(t) + x_r(t) \end{aligned} \quad (3.100)$$

dove la componente deterministica $x_p(t)$ è la componente quasi periodica della serie temporale $x(t)$ e $x_r(t)$ è la componente puramente aleatoria per la quale si ha

$$\langle x_r(t) e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t \equiv 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.101)$$

Nell'approccio stocastico in maniera analoga alla (3.100) un segnale stocastico può essere decomposto nella somma della sua media statistica

e di un termine residuo a media nulla. Nell'approccio stocastico anche la risposta impulsiva di un sistema LTV può essere vista come la somma di una componente deterministica e di una puramente aleatoria in quanto la media statistica può essere applicata nello stesso modo ad un processo stocastico ed alla risposta impulsiva di un sistema stocastico. Nell'approccio FOT l'operazione di estrazione della componente quasi periodica non è in grado di fornire la componente deterministica dei sistemi, ma può essere utile vedere un sistema LTV come il parallelo di due sistemi tali che la sua risposta impulsiva è

$$h(t, u) \triangleq h_D(t, u) + h_R(t, u) \quad (3.102)$$

dove $h_D(t, u)$ è la risposta impulsiva del sottosistema che per ogni ingresso quasi periodico dà in uscita un segnale quasi periodico e sarà detta risposta impulsiva della componente FOT deterministica del sistema LTV; la funzione $h_R(t, u)$ è la risposta impulsiva del sottosistema che per ogni ingresso quasi periodico dà in uscita un segnale privo di componenti sinusoidali additive con potenza finita e sarà detta componente FOT puramente aleatoria del sistema LTV. Per i sistemi FOT deterministici si avrà

$$h(t, u) = h_D(t, u) \quad (3.103)$$

mentre i sistemi per i quali si ha

$$h(t, u) = h_R(t, u) \quad (3.104)$$

saranno denominati sistemi FOT puramente aleatori.

Sostituendo la (3.100) e (3.102) nella relazione ingresso/uscita (3.81), la componente quasi periodica del segnale in uscita $y(t)$ è data da

$$\begin{aligned} E^{\{\alpha\}}\{y(t)\} &= \int_{\mathbb{R}} h_D(t, u) x_p(u) du \\ &+ E^{\{\alpha\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} h_R(t, u) x_p(u) du \right\} \\ &+ E^{\{\alpha\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} h_D(t, u) x_r(u) du \right\} \\ &+ E^{\{\alpha\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} h_R(t, u) x_r(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

In base alla definizione di $h_R(t, u)$, il secondo termine a destra dell'uguale della (3.105) è nullo, mentre, nell'ipotesi di assenza di termini impulsivi

per la funzione $G_\sigma(\lambda)$ e di indipendenza statistica, nell'approccio FOT, fra il segnale in ingresso e il sistema è possibile dimostrare che sono nulli anche il terzo ed il quarto termine a destra dell'uguale della (3.105). Si ha, quindi

$$E^{\{\alpha\}}\{y(t)\} = \int_{\mathbb{R}} h_D(t, u) x_p(u) du \quad (3.106)$$

dove, per analogia con l'approccio stocastico, $h_D(t, u)$ può essere interpretato come la media, nell'approccio FOT, della risposta impulsiva $h(t, u)$ (che non può essere ottenuta in generale attraverso l'operazione di estrazione della componente quasi periodica). Un risultato analogo alla (3.106) si ha nell'approccio stocastico quando un processo stocastico è filtrato da un sistema con risposta impulsiva aleatoria, nell'ipotesi che sistema e segnali sono statisticamente indipendenti e all'operatore di estrazione della componente quasi periodica si sostituisca la media statistica e alla componente deterministica della risposta impulsiva del sistema la sua media statistica. Tali grandezze nell'approccio stocastico possono essere misurate solo se sono soddisfatte opportune ipotesi di ergodicità, mentre nell'approccio FOT la componente quasi periodica del segnale in uscita (la media nell'approccio FOT) può essere misurata partendo da una sola serie temporale.

Come esempio di applicazione dei risultati precedenti si consideri un segnale PAM

$$x_{\text{PAM}}(t) = x_\delta(t) \otimes q(t) \quad (3.107)$$

dove $q(t)$ è un impulso ad energia finita e $x_\delta(t)$ è il segnale campionato idealmente

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(t - kT_s). \quad (3.108)$$

Il segnale $x_{\text{PAM}}(t)$ può essere interpretato come l'uscita di un sistema LTI (e quindi deterministico) che ha in ingresso il segnale aleatorio $x_\delta(t)$ statisticamente indipendente dal sistema. Dalla (3.106) si ha

$$\begin{aligned} E^{\{\alpha\}}\{x_{\text{PAM}}(t)\} &= E^{\{\alpha\}}\{x_\delta(t) \otimes q(t)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E^{\{\alpha\}}\{x(k)\} q(t - kT_s) \end{aligned} \quad (3.109)$$

con $E^{\{\tilde{\alpha}\}}$ che indica l'operatore di estrazione della componente quasi periodica a tempo discreto.

3.5.3 Caratterizzazione di ordine superiore dei sistemi LTV nel dominio del tempo e della frequenza

Il *lag product* di ordine N dell'uscita $y(t)$ di un sistema LTV è dato da

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) &\triangleq \prod_{n=1}^N y^{(*)n}(t + \tau_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{n=1}^N h^{(*)n}(t + \tau_n, t + s_n) L_x(\mathbf{1}t + \mathbf{s}) d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (3.110)$$

con $\mathbf{s} \triangleq [s_1, \dots, s_N]^T$. Si ha, quindi, che le periodicità nascoste del segnale in ingresso che sono rigenerate dal *lag product* di ordine N sono trasformate nelle periodicità presenti nel *lag product* di ordine N del segnale in uscita da una trasformazione lineare rispetto al prodotto tempo ritardo il cui nucleo è il *lag product* di ordine N della risposta impulsiva del sistema LTV. Si ha la seguente decomposizione per il *lag product* di ordine N della risposta impulsiva:

$$\prod_{n=1}^N h^{(*)n}(t + \tau_n, u_n) \triangleq \mathcal{R}_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + l_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) \quad (3.111)$$

con $\mathbf{u} \triangleq [u_1, \dots, u_N]^T$. La funzione $\mathcal{R}_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})$ è la funzione *momento temporale del sistema* ed è il nucleo dell'operatore lineare che trasforma la componente quasi periodica del *lag product* in ingresso al sistema, cioè il momento temporale in ingresso, nella componente quasi periodica presente nel *lag product* in uscita al sistema; $l_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})$ è il nucleo dell'operatore lineare che trasforma qualsiasi componente quasi periodica presente nel *lag product* in ingresso in una componente FOT puramente aleatoria del *lag product* in uscita al sistema.

Per ricavare l'espressione del momento temporale del sistema si consideri il seguente *lag product* in ingresso:

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \mathbf{s}) \equiv \mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \mathbf{s}) = e^{j2\pi\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{1}t + \mathbf{s})} \quad (3.112)$$

con $\boldsymbol{\lambda} \triangleq [\lambda_1, \dots, \lambda_N]^T$. Si ha che la componente quasi periodica del *lag product* in uscita al sistema è

$$E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\} = \sum_{\eta \in E_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}}} G'_\eta(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\eta t} \quad (3.113)$$

dove per ogni $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ si ha che $E_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}}$ è un insieme numerabile e $G'_\eta(\boldsymbol{\tau})$ sono funzioni complesse.

Dalla numerabilità di $E_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}}$ si ha che l'insieme di punti $(\eta, \boldsymbol{\lambda}) \in E_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}} \times \mathbb{R}^N$ tali che $G'_\eta(\boldsymbol{\tau}) \neq 0$ è costituito da un insieme di *manifold* descritti da equazioni esplicite; si ha quindi

$$\begin{aligned} & \text{cl} \left\{ (\eta, \boldsymbol{\lambda}) \in E_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}} \times \mathbb{R}^N : G'_\eta(\boldsymbol{\tau}) \neq 0 \right\} \\ &= \text{cl} \bigcup_{\theta \in \Theta} \{ (\eta, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R} \times D_\theta(\boldsymbol{\tau}) : \eta = \varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \} \end{aligned} \quad (3.114)$$

dove Θ è un insieme numerabile e $\varphi_\theta(\cdot, \cdot)$ sono funzioni reali tali che $\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \neq \varphi_{\theta'}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ per $\theta \neq \theta'$ e $D_\theta(\boldsymbol{\tau})$ è il dominio di $\varphi_\theta(\cdot, \boldsymbol{\tau})$. Definita la funzione

$$G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \begin{cases} G'_\eta(\boldsymbol{\tau})|_{\eta=\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau})}, & \boldsymbol{\lambda} \in D_\theta(\boldsymbol{\tau}) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.115)$$

si ha che la componente quasi periodica del *lag product* in uscita al sistema è

$$E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\} = \sum_{\theta \in \Theta} G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau})t}. \quad (3.116)$$

Dalla definizione di funzione momento temporale del sistema si ha che

$$E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{R}_h(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) e^{j2\pi\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}} d\mathbf{u} \quad (3.117)$$

da cui segue che la funzione momento temporale del sistema ha la seguente espressione:

$$\mathcal{R}_h(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \sum_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}^N} G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau})t} e^{-j2\pi\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}} d\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.118)$$

Poichè l'operatore di estrazione della componente quasi periodica è il corrispondente dell'operatore di media nell'approccio stocastico classico, si ha che per $N = 2$ la funzione $E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\lambda}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\}$ è la correlazione fra i segnali in uscita corrispondenti agli ingressi $e^{j2\pi\lambda_1 t}$ e $e^{j2\pi\lambda_2 t}$. Mentre si ha che $E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\lambda}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\}$ dipende da $\tau_1 - \tau_2$, un'analogia proprietà non vale per la dipendenza da λ_1 e λ_2 . Nel caso particolare in cui si ha che per ogni $\theta \in \Theta$

$$G_\theta(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) = G_\theta(\Delta\lambda, \Delta\tau) \quad (3.119)$$

$$\varphi_\theta(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) = \varphi_\theta(\Delta\lambda, \Delta\tau) \quad (3.120)$$

dove $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ e $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$, la funzione $G_\theta(\cdot, \cdot)$ corrisponde alla funzione di correlazione tempo-frequenza definita nell'approccio stocastico tradizionale [33]. La sua trasformata di Fourier rispetto alla variabile $\Delta\tau$, valutata per $\Delta\lambda = 0$, corrisponde alla funzione spettro di potenza Doppler del canale, mentre la doppia trasformata rispetto a $\Delta\lambda$ e $\Delta\tau$ è la funzione di scattering del canale [33].

Si può ricavare una relazione ingresso-uscita in termini di funzioni momenti temporali dei sistemi LTV che è formalmente analoga a quella ottenuta per i processi stocastici:

$$\begin{aligned} E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\} &= \mathcal{R}_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{R}_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{1}t + \mathbf{s}) \mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Il vantaggio della (3.121) rispetto all'analogia relazione nell'approccio stocastico consiste nel fatto che non è necessario formulare nessuna ipotesi di ergodicità. Poichè le $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})$ e $\mathcal{R}_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})$ sono le medie (nell'approccio FOT) dei *lag product* in ingresso e in uscita, la funzione $\mathcal{R}_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{1}t + \mathbf{s})$ può essere interpretata come la media, nell'approccio FOT, del *lag product* della risposta impulsiva, da cui deriva il nome di momento temporale del sistema. In generale $\mathcal{R}_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{1}t + \mathbf{s})$ non può essere ottenuto estraendo la componente quasi periodica del prodotto della risposta impulsiva a differenza di come accade per i segnali.

In termini di funzioni cumulanti temporali la relazione ingresso-uscita è

$$C_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathbb{R}^N} R_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{1}t + \mathbf{s}) C_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (3.122)$$

Nelle ipotesi che le funzioni considerate siano trasformabili almeno nel senso delle distribuzioni si ha che la trasformata di Fourier di ordine N di

entrambi i membri dell'equazione (3.121) fornisce la relazione ingresso-uscita in termini di funzioni momenti spettrali:

$$S_y(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^N} S_h(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) S_x(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \quad (3.123)$$

dove la funzione

$$S_h(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^{2N}} R_h(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) e^{-j2\pi(\mathbf{f}^T \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u})} d\boldsymbol{\tau} d\mathbf{u} \quad (3.124)$$

è la funzione momento spettrale del sistema.

La relazione ingresso-uscita in termini di funzioni cumulanti spettrali, infine, è data da

$$P_y(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^N} S_h(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) P_x(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.125)$$

3.5.4 Numerabilità dell'insieme delle frequenze di ciclo

Il problema della numerabilità dell'insieme delle frequenze di ciclo in uscita ad un sistema LTV è rilevante nell'approccio FOT poichè in tale contesto l'operazione di estrazione della componente quasi periodica è analoga all'operazione di media statistica dell'approccio stocastico tradizionale. Considerando un sistema LTV che ha in ingresso un segnale $x(t)$, in base alla relazione ingresso-uscita per i momenti temporali (3.121), si ha che l'insieme delle frequenze di ciclo di ordine N per ogni valore di $\boldsymbol{\tau}$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}} &\triangleq \{ \alpha \in \mathbb{R} : \mathcal{R}_{\mathbf{y}}^\alpha \boldsymbol{\tau} \neq 0 \} \\ &= \bigcup_{\theta \in \Theta} \bigcup_{\zeta \in W_{\mathbf{x}}} \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^N} G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \right. \\ &\quad \left. \delta_{\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - \alpha} \mathcal{S}_{\mathbf{x}, \zeta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \neq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Dato un sistema LTV che non si comporti come un risonatore, cioè tale che il *lag product* in uscita presenti componenti sinusoidali additive solo in corrispondenza di particolari frequenze del *lag product* in ingresso, l'insieme (3.126) risulta numerabile e il segnale in uscita risulta GACS (o a potenza nulla), sia nel caso di segnali in ingresso GACS privi di componenti ACS, sia nel caso di segnali in ingresso ACS [19].

Esaminiamo il caso di un sistema LTV puramente aleatorio e consideriamo il canale Doppler esistente fra un trasmettitore ed un ricevitore con accelerazione non nulla la cui risposta impulsiva è

$$h(t, u) = \delta(u - t - D(t)) \quad (3.127)$$

con

$$D(t) \triangleq d_0 + d_1 t + d_2 t^2, \quad d_2 \neq 0. \quad (3.128)$$

Se $e^{j2\pi\lambda^T(\mathbf{1}t+\mathbf{s})}$ è il *lag product* in ingresso, la componente quasi periodica del *lag product* in uscita è data da

$$\mathbb{E}^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\lambda}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})\} = e^{j2\pi\lambda^{(-)T}(\mathbf{1}t+\boldsymbol{\tau})} \mathbb{E}^{\{\alpha\}} \left\{ e^{-j2\pi\lambda^T \mathbf{D}^{(-)}(\mathbf{1}t+\boldsymbol{\tau})} \right\} \quad (3.129)$$

con $\mathbf{D}^{(-)}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) \triangleq [(-)_1 D(t + \tau_1), \dots, (-)_N D(t + \tau_N)]^T$. Nel caso in cui $D(t)$ è dato da (3.128) si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\{\alpha\}} \left\{ e^{-j2\pi\lambda^T \mathbf{D}^{(-)}(\mathbf{1}t+\boldsymbol{\tau})} \right\} \\ = e^{-j2\pi\lambda^T [d_0 \mathbf{1}^{(-)} + d_1 \boldsymbol{\tau}^{(-)} + d_2 \boldsymbol{\tau}^{(-)(2)}]} \\ e^{-j2\pi\lambda^T [d_1 \mathbf{1}^{(-)} + 2d_2 \boldsymbol{\tau}^{(-)}]t} \delta_{\lambda^T \mathbf{1}^{(-)} d_2} \end{aligned} \quad (3.130)$$

dove $\mathbf{1}^{(-)} \triangleq [(-)_1 1, \dots, (-)_N 1]^T$, $\boldsymbol{\tau}^{(-)} \triangleq [(-)_1 \tau_1, \dots, (-)_N \tau_N]^T$, $\boldsymbol{\tau}^{(-)(2)} \triangleq [(-)_1 \tau_1^2, \dots, (-)_N \tau_N^2]^T$.

Dalle (3.129), (3.130) e (3.116) segue che per un sistema LTV che ha risposta impulsiva data dalle (3.127), (3.128), l'insieme Θ contiene solo un elemento e, per $d_2 \neq 0$, si ha

$$G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = e^{j2\pi\lambda^{(-)T}[(1-d_1)\boldsymbol{\tau} - d_2 \boldsymbol{\tau}^{(2)}]} \delta_{\lambda^{(-)T} \mathbf{1}} \quad (3.131)$$

$$\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = -2d_2 \lambda^{(-)T} \boldsymbol{\tau}, \quad \text{per } \lambda^{(-)T} \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (3.132)$$

Considerando la (3.118), si ha, poi,

$$\mathcal{R}_h(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-j2\pi\lambda^T [\mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}^{(-)}(t, \boldsymbol{\tau})]} \delta_{\lambda^{(-)T} \mathbf{1}} d\boldsymbol{\lambda} \quad (3.133)$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}^{(-)}(t, \boldsymbol{\tau}) &\triangleq [(-)_1 \phi(t, \tau_1), \dots, (-)_N \phi(t, \tau_N)]^T \\ &= (1 - d_1) \boldsymbol{\tau}^{(-)} - d_2 \boldsymbol{\tau}^{(-)(2)} - 2d_2 \boldsymbol{\tau}^{(-)} t \end{aligned} \quad (3.134)$$

dove

$$\phi(t, \tau) \triangleq (1 - d_1)\tau - d_2\tau^2 - 2d_2\tau t. \quad (3.135)$$

Sostituendo l'espressione del momento temporale del sistema (3.133) nella relazione ingresso uscita (3.121), si ha:

$$\mathcal{R}_y(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{j2\pi\boldsymbol{\lambda}^T\phi^{(-)}(t,\boldsymbol{\tau})} \delta_{\boldsymbol{\lambda}^{(-)}\mathbf{1}} \mathcal{S}_x(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.136)$$

La presenza della funzione delta di Kronecker nella funzione integranda implica che la funzione momento in uscita al sistema può contenere componenti sinusoidali additive solo se il segnale in ingresso contiene componenti ACS. Se il segnale in ingresso è ACS si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x(\boldsymbol{\lambda}) \delta_{\boldsymbol{\lambda}^{(-)}\mathbf{1}} &\triangleq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_x} \mathcal{S}_x^\alpha(\boldsymbol{\lambda}) \delta_{\boldsymbol{\lambda}^{(-)}\mathbf{1}} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_x} \mathcal{S}_x^\alpha(\boldsymbol{\lambda}') \delta(\alpha - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1}) \delta_{\boldsymbol{\lambda}^{(-)}\mathbf{1}} \end{aligned} \quad (3.137)$$

con $\mathcal{S}_x^\alpha(\boldsymbol{\lambda}')$ che è la funzione momento spettrale ciclico a dimensione ridotta che può essere impulsiva.

Se si assume che il sistema LTV è FOT deterministico e sufficientemente regolare tale che le funzioni $G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ non contengano termini impulsivi in $\boldsymbol{\lambda}$ si ricava la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \Omega^N} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{n=1}^N |\dot{\varphi}_{\sigma_n}((-)_n \lambda_n)| H_{\sigma_n}^{(*)n}(\varphi_{\sigma_n}((-)_n \lambda_n)) \\ &\quad \mathcal{S}_x(\boldsymbol{\lambda}) e^{j2\pi\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(-)}(\boldsymbol{\lambda}^{(-)})^T(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Se si considera il caso di un sistema FOT deterministico che ha in ingresso un segnale GACS non contenente alcuna componente ACS, si può dimostrare che esso ha in uscita un segnale di potenza nulla tranne nel caso in cui la risposta impulsiva del sistema contenga termini impulsivi; se in ingresso c'è un segnale ACS in uscita al sistema c'è un segnale ACS qualora il sistema contenga componenti LPTV o termini di scalatura temporale.

Come esempio di sistema LTV FOT deterministico consideriamo un canale Doppler esistente fra un trasmettitore ed un ricevitore che si muovono con velocità relativa costante la cui risposta impulsiva è

$$h(t, u) = \delta(u - t + (d_0 + d_1 t)). \quad (3.139)$$

Tale sistema introduce un ritardo dipendente dal tempo $D(t) = d_0 + d_1 t$ che realizza una scalatura temporale ed introduce un ritardo costante nel segnale in uscita al sistema

$$\begin{aligned} y(t) &\triangleq x((1 - d_1)t - d_0) \\ &= x((1 - d_1)t) \otimes \delta(t - d_0/(1 - d_1)). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Assumendo che $d_0 = 0$, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\mathcal{R}_y(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_x(s(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})) \quad (3.141)$$

$$\mathcal{R}_y^\alpha(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_x^{\alpha/s}(s\boldsymbol{\tau}) \quad (3.142)$$

con $s \triangleq 1 - d_1$. Se in ingresso c'è un segnale DSB $x(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t)$ si ha che il segnale in uscita è DSB con frequenze di ciclo $\pm 2f_0 s$ e $\pm 4f_0 s$.

3.5.5 Filtraggio LAPTV

Consideriamo un sistema LAPTV, cioè un sistema FOT deterministico LTV la cui risposta impulsiva è

$$h(t, u) = \sum_{\sigma \in \Omega} h_\sigma(t - u) e^{j2\pi\sigma u} \quad (3.143)$$

con Ω insieme numerabile degli spostamenti in frequenza introdotti dal sistema. Considerando le (3.86), (3.95) si ha

$$\varphi_\sigma(\lambda) = \lambda + \sigma, \quad \sigma \in \Omega \quad (3.144)$$

$$G_\sigma(\lambda) = H_\sigma(\lambda + \sigma), \quad \sigma \in \Omega \quad (3.145)$$

con $H_\sigma(\cdot)$ trasformata di Fourier di $h_\sigma(\cdot)$. In particolare, per i sistemi LAPTV si ha

$$\varphi_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}^{(-)T} \mathbf{1} \quad (3.146)$$

e

$$G_\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{n=1}^N H_{\sigma_n}^{(*)n}((-)_n \lambda_n + \sigma_n) e^{j2\pi(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\sigma}^{(-)})^T \boldsymbol{\tau}} \quad (3.147)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}^{(-)} \triangleq [(-)_1 \sigma_1, \dots, (-)_N \sigma_N]^T$.

Per i sistemi LAPTV (in particolare LTI) vale il risultato ottenuto per i sistemi LTV FOT deterministici: se in ingresso al sistema c'è un

segnale GACS non contenente alcuna componente ACS, il segnale in uscita è GACS con i GCTMF identicamente nulli, cioè con potenza nulla. Inoltre i segnali GACS che non contengono componenti ACS hanno una funzione di autocorrelazione mediata nel tempo $\mathcal{R}_x(\tau_1, 0)$ che contiene il termine additivo $\overline{x^2}\delta_{\tau_1}$ tale che la potenza è distribuita su una banda infinita; quando viene filtrato da un sistema con banda finita il segnale in uscita è nullo.

In molti problemi di stima un segnale può essere modellato come ACS oppure GACS in funzione della lunghezza dell'intervallo di osservazione. Questo fatto pone alcune limitazioni nelle prestazioni ottenute con alcuni algoritmi di elaborazione dei segnali adottati nelle comunicazioni dove segnali ACS sono elaborati da sistemi LAPTV. Infatti, se l'intervallo di osservazione è incrementato per aumentare l'immunità agli effetti del rumore e dell'interferenza, può accadere che il modello ACS adottato per il segnale in ingresso non sia più valido sia più corretto adottare un modello GACS, poichè piccole variazioni temporali dei parametri del segnale (non evidenti quando la lunghezza dell'intervallo di osservazione è inferiore) devono essere presi in considerazione. L'aumento eccessivo della lunghezza dell'intervallo di osservazione non sempre comporta il benefico effetto di migliorare l'affidabilità delle stime delle statistiche cicliche del segnale in uscita; esso può dare origine a statistiche cicliche (e statistiche cicliche generalizzate) che tendono asintoticamente a zero. Esiste, quindi, un limite superiore alla lunghezza massima dell'intervallo di osservazione e, di conseguenza, esiste un limite al minimo rapporto segnale-rumore accettabile per algoritmi basati sulla ciclostazionarietà che sono, in principio, immuni al rumore e all'interferenza nel caso in cui la lunghezza dell'intervallo di osservazione tenda all'infinito.

3.5.6 Modulazione a prodotto

Consideriamo un sistema LTV che realizza una modulazione a prodotto di un segnale in ingresso GACS:

$$y(t) = c(t)x(t) \quad (3.148)$$

dove $c(t)$ è un segnale GACS statisticamente indipendente nell'approccio FOT da $x(t)$ e con TMF di ordine N pari a

$$\mathcal{R}_c(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\xi \in W_c} \mathcal{R}_{c,\xi}(\boldsymbol{\tau}) e^{j2\pi\gamma_\xi(\boldsymbol{\tau})t}. \quad (3.149)$$

La risposta impulsiva del sistema è

$$h(t, u) = c(t)\delta(t - u), \quad (3.150)$$

ed il sistema è puramente aleatorio se $c(t)$ non contiene componenti sinusoidali additive.

La componente quasi periodica del *lag product* in uscita quando l'ingresso è $e^{j2\pi\lambda^T(1t+s)}$ è data da

$$E^{\{\alpha\}} \{L_{\mathbf{y};\lambda}(1t + \tau)\} = \sum_{\xi \in W_c} \mathcal{R}_{c,\xi}(\tau) e^{j2\pi\lambda^T\tau} e^{j2\pi(\gamma_\xi(\tau) + \lambda^T\mathbf{1})t}. \quad (3.151)$$

Confrontando la (3.151) con la (3.116), si deduce che c'è una corrispondenza uno a uno fra gli elementi θ dell'insieme Θ e gli elementi di ξ dell'insieme W_c . Si ha, inoltre,

$$\varphi_\theta(\lambda, \tau) = \gamma_\xi(\tau) + \lambda^T\mathbf{1} \quad (3.152)$$

$$G_\theta(\lambda, \tau) = \mathcal{R}_{c,\xi}(\tau) e^{j2\pi\lambda^T\tau}. \quad (3.153)$$

La funzione momento temporale della trasformazione modulazione a prodotto può essere scritta nel seguente modo:

$$\mathcal{R}_h(1t + \tau, \mathbf{u}) = \mathcal{R}_c(1t + \tau)\delta(1t + \tau - \mathbf{u}) \quad (3.154)$$

dove $\delta(\mathbf{u})$ è la funzione di Dirac N -dimensionale. La relazione ingresso uscita in termini di TMF è data da

$$\mathcal{R}_y(1t + \tau) = \mathcal{R}_c(1t + \tau)\mathcal{R}_x(1t + \tau) \quad (3.155)$$

che è formalmente analoga al risultato nell'approccio stocastico. L'espressione (3.154) conferma l'interpretazione di $\mathcal{R}_h(1t + \tau, \mathbf{u})$ come media (nell'approccio FOT) del prodotto tempo ritardo della risposta impulsiva, essendo $\mathcal{R}_c(1t + \tau)$ la componente quasi periodica del prodotto tempo ritardo del segnale $c(t)$.

Il TMF di ordine N del segnale $x(t)$ è

$$\mathcal{R}_x(1t + \tau) = \sum_{\zeta \in W_x} \mathcal{R}_{x,\zeta}(\tau) e^{j2\pi\alpha_\zeta(\tau)t} \quad (3.156)$$

e le frequenze di ciclo relative al prodotto tempo ritardo della serie temporale GACS in uscita sono

$$\beta_\eta(\tau) = \alpha_\zeta(\tau) + \gamma_\xi(\tau), \quad (\zeta, \xi) \in W_x \times W_c \quad (3.157)$$

e, inoltre,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathbf{y},\eta}(\boldsymbol{\tau}) &\triangleq \left\langle \mathcal{R}_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi\beta_{\eta}(\boldsymbol{\tau})t} \right\rangle_t \\ &= \sum_{\zeta \in W_{\mathbf{x}}} \sum_{\zeta \in W_{\mathbf{c}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x},\zeta}(\boldsymbol{\tau}) \mathcal{R}_{\mathbf{c},\xi}(\boldsymbol{\tau}) \\ &\quad \delta_{\beta_{\eta}(\boldsymbol{\tau}) - [\alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau}) + \gamma_{\xi}(\boldsymbol{\tau})]}.\end{aligned}\quad (3.158)$$

Nel caso in cui il segnale $c(t)$ è periodico si ha che la trasformazione (3.148) è LAPTV e quindi

$$\mathcal{R}_{\mathbf{c}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \prod_{n=1}^N c^{(*)n}(t + \tau_n). \quad (3.159)$$

Infine, la relazione ingresso uscita in termini di cumulanti è

$$\mathcal{C}_{\mathbf{y}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_{\mathbf{c}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) \mathcal{C}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}). \quad (3.160)$$

3.5.7 Canali Multipath Doppler

Il modello di canale Doppler relativo nell'ipotesi di banda larga, introdotto nel primo capitolo, è un sistema LTV FOT deterministico. Generalizzando al caso di K cammini, si ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t, u) = \sum_{k=1}^K a_k \delta(u - s_k t + d_k) e^{j2\pi\nu_k t}. \quad (3.161)$$

La funzione di trasmissione corrispondente, doppia trasformata di Fourier della risposta impulsiva, è data da

$$H(f, \lambda) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-j2\pi\nu_k d_k} \delta(f - \nu_k - \lambda s_k) \quad (3.162)$$

da cui si ottengono

$$\varphi_k(\lambda) = s_k \lambda + \nu_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.163)$$

$$G_k(\lambda) = a_k e^{-j2\pi\lambda d_k}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.164)$$

e, in maniera equivalente,

$$\psi_k(f) = \frac{1}{s_k}(f - \nu_k), \quad k = 1, \dots, K \quad (3.165)$$

$$H_k(f) = \frac{a_k}{|s_k|} e^{j2\pi(f - \nu_k)d_k/s_k}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.166)$$

La funzione momento temporale del sistema del canale multipath Doppler è data da

$$\mathcal{R}_h(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k} \in I_K^N} \left(\prod_{n=1}^N a_{k_n}^{(*)n} \right) e^{j2\pi \boldsymbol{\nu}_k^{(-)T}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})} \delta(\mathbf{s}_k \circ (\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{d}_k - \mathbf{u}) \quad (3.167)$$

dove $\mathbf{k} \triangleq [k_1, \dots, k_N]^T$, $\mathbf{s}_k \triangleq [s_{k_1}, \dots, s_{k_N}]^T$, $\boldsymbol{\nu}_k^{(-)} \triangleq [(-)_1 \nu_{k_1}, \dots, (-)_N \nu_{k_N}]^T$, $I_K \triangleq \{1, \dots, K\}$ e \circ rappresenta il prodotto matriciale di Hadamard.

La funzione momento temporale del segnale in uscita al canale Doppler è espressa da

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k} \in I_K^N} \left(\prod_{n=1}^N a_{k_n}^{(*)n} \right) e^{j2\pi \boldsymbol{\nu}_k^{(-)T}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})} \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{s}_k \circ (\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{d}_k) \quad (3.168)$$

dove l'uguaglianza è in media quadratica temporale.

Non tutti termini a destra dell'uguale della (3.168) danno contributo non nullo alla componente quasi periodica del *lag product* di ordine N in uscita al sistema. Nel caso in cui i fattori di scala temporale dei differenti cammini sono diversi e nell'ipotesi in cui $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{x}(t + \tau)$ sono asintoticamente indipendenti ($|\tau| \rightarrow \infty$) nell'approccio FOT, risulta che, se $s_h \neq s_k$ per $h \neq k$, allora, per $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}\tau_0$, $|\tau_0| \rightarrow \infty$, si ha

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{s}_k \circ (\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})) \longrightarrow \prod_{n=1}^N E^{\{\alpha\}} \left\{ \tilde{x}^{(*)n}(s_n t + s_n \tau_n) \right\} \quad (3.169)$$

poichè le due serie temporali $\tilde{x}^{(*)h}(s_n t + s_n \tau_n)$ e $\tilde{x}^{(*)k}(s_k t + s_k \tau_k)$ risultano traslate l'una rispetto all'altra di una quantità infinita. Un'uguale fattorizzazione si ottiene per $|t| \rightarrow \infty$. Se almeno uno degli s_k è differente da tutti gli altri nell'asintotica (per $|t| \rightarrow \infty$) fattorizzazione di

$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{s}_{\mathbf{k}} \circ (\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}))$ c'è almeno un termine del tipo $E^{\{\alpha\}} \{ \tilde{x}^{(*)n}(s_n t + s_n \tau_n) \}$. Quindi se $\tilde{x}(t)$ non contiene alcuna componente additiva sinusoidale, si ha

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{s}_{\mathbf{k}} \circ (\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})) = 0. \quad (3.170)$$

Assumendo nelle (3.168) che almeno uno degli s_k è diverso da tutti gli altri, i termini con $\mathbf{s} \neq \mathbf{1}s_n$, cioè con $\mathbf{k} \neq \mathbf{1}k_n$, sono nulli in media quadratica temporale e la (3.168) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{k \in I_k} \left(\prod_{n=1}^N a_{k_n}^{(*)n} \right) e^{j2\pi\nu_k \mathbf{1}^{(-)T}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})} \\ &\quad \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(s_k(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{1}d_k) \end{aligned} \quad (3.171)$$

dove l'uguaglianza è in media quadratica temporale e si è considerato $\mathbf{s}_{\mathbf{1}k_n} = \mathbf{1}s_{k_n}$. Infine si ricava

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}^\alpha(\boldsymbol{\tau}) &= \sum_{k \in I_K} \left(\prod_{n=1}^N a_k^{(*)n} \right) e^{j2\pi\nu_k \mathbf{1}^{(-)T} \boldsymbol{\tau}} \\ &\quad \sum_{\zeta_k \in W_{\mathbf{x}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}, \zeta_k}(s_k \boldsymbol{\tau} - \mathbf{1}d_k) \delta_{\alpha_{\zeta_k}(s_k \boldsymbol{\tau}) - (\alpha - \mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1}\nu_k)/s_k} \\ &= \sum_{k \in I_k} \left(\prod_{n=1}^N a_k^{(*)n} \right) e^{j2\pi\nu_k \mathbf{1}^{(-)T} \boldsymbol{\tau}} \\ &\quad \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{(\alpha - \mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1}\nu_k)/s_k}(s_k \boldsymbol{\tau} - \mathbf{1}d_k) \end{aligned} \quad (3.172)$$

dove $\mathbf{1}^{(-)} \triangleq [(-)_1 1, \dots, (-)_N 1]^T$.

Dalla (3.172) segue che se $\tilde{\mathbf{x}}$ è GACS anche $\tilde{\mathbf{y}}$ è GACS e frequenze di ciclo dipendenti dal ritardo di $\tilde{\mathbf{y}}$ sono

$$\beta_{\zeta, k}(\boldsymbol{\tau}) = s_k \alpha_{\zeta}(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1}\nu_k, \quad \zeta \in W_{\mathbf{x}}, k \in I_k. \quad (3.173)$$

Nel caso particolare in cui valga la condizione espressa nel primo capitolo

$$WT \ll \frac{c}{v} \quad (3.174)$$

per ognuno dei K cammini, allora i fattori di scala s_k possono essere considerati unitari, le funzioni $\varphi_k(\lambda)$ sono lineari ed il canale multipath Doppler può essere modellato come un sistema LAPT_V e si ha

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k} \in I_K^N} \left(\prod_{n=1}^N a_k^{(*)n} \right) e^{j2\pi \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}}^{(-)T} \boldsymbol{\tau}} \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{\alpha - \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}}^{(-)T} \mathbf{1}}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{d}_{\mathbf{k}}).$$

3.6 Campionamento dei segnali GACS

Nell'approccio FOT una serie temporale $x(k)$ a valori complessi, di potenza finita a tempo discreto, è detta ciclostazionaria in senso ampio di ordine N con frequenza di ciclo $\tilde{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ per una data configurazione di coniugazioni se il CTMF di ordine N

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) \triangleq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K \prod_{n=1}^N x^{(*)n}(k+m_n) e^{-j2\pi \tilde{\alpha} k} \quad (3.175)$$

esiste ed è non nullo per qualche vettore colonna $\mathbf{m} \triangleq [m_1, \dots, m_N]^T \in \mathbb{Z}^N$, dove $\mathbf{x} \triangleq [x^{(*)1}(k), \dots, x^{(*)N}(k)]^T$ e la convergenza della media temporale rispetto a k è assunta in media quadratica temporale o nel senso delle distribuzioni.

Se l'insieme

$$\tilde{\mathcal{A}}_m \triangleq \left\{ \tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[: \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) \neq 0 \right\} \quad (3.176)$$

è numerabile per ogni \mathbf{m} allora il prodotto tempo ritardo può essere espresso come la somma di una componente quasi periodica e di un termine residuo che non contiene alcuna componente additiva sinusoidale, cioè si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) &\triangleq \prod_{n=1}^N x^{(*)n}(k+m_n) \\ &= \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) + \tilde{l}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) \end{aligned} \quad (3.177)$$

dove la funzione quasi periodica

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) &\triangleq \mathbb{E}^{\{\tilde{\alpha}\}} \left\{ \prod_{n=1}^N x^{(*)n}(k+m_n) \right\} \\ &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_m} \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) e^{j2\pi \tilde{\alpha} k} \end{aligned} \quad (3.178)$$

è detta funzione *momento temporale*. Il termine residuo è tale che

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K \tilde{l}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) e^{-j2\pi\tilde{\alpha}k} \equiv 0, \quad \forall \tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[. \quad (3.179)$$

L'insieme \mathcal{A} definito dalla (3.10) nel caso tempo continuo è non numerabile per le serie temporali che sono GACS ma non ACS; il corrispondente insieme nel caso tempo discreto è

$$\tilde{\mathcal{A}} \triangleq \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{m}} \quad (3.180)$$

che è sempre numerabile in quanto unione di insiemi numerabili con $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$. Si ha, quindi, che tutti i segnali a tempo discreto per i quali il prodotto tempo ritardo di ordine N contenga componenti sinusoidali additive sono ACS e la somma nella (3.178) può essere estesa all'insieme $\tilde{\mathcal{A}}$.

La funzione cumulante di ordine N di una serie temporale a tempo discreto e a valori complessi può essere espressa come

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) = \sum_P \left[(-1)^{p-1} (p-1)! \prod_{i=1}^p \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}, \mu_i}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}_{\mu_i}) \right]. \quad (3.181)$$

Essa è una funzione quasi periodica di k e può essere scritta come

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) = \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}) e^{-j2\pi\tilde{\beta}k} \quad (3.182)$$

dove gli insiemi

$$\tilde{\mathcal{B}} \triangleq \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{m}} \quad (3.183)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{m}} \triangleq \left\{ \tilde{\beta} \in [-1/2, 1/2[: \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}) \neq 0 \right\} \quad (3.184)$$

sono numerabili.

Si consideri la serie a tempo discreto $x(k)$ ottenuta dai campioni di un segnale GACS a tempo continuo $x_c(t)$

$$x(k) \triangleq x_c(t)|_{t=kT_s} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.185)$$

con T_s pari al periodo di campionamento e si consideri la versione campionata del prodotto tempo ritardo

$$\begin{aligned}\tilde{L}_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) &= L_{x_c}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})|_{t=kT_s, \boldsymbol{\tau}=\mathbf{m}T_s} \\ &= \tilde{\mathcal{R}}'_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) + \tilde{l}_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})\end{aligned}\quad (3.186)$$

dove il termine residuo non contiene alcuna componente additiva sinusoidale a tempo discreto. La funzione $\tilde{\mathcal{R}}'_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})$ può essere scritta come

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}'_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) &\triangleq \mathcal{R}_{x_c}(\mathbf{1}t + \boldsymbol{\tau})|_{t=kT_s, \boldsymbol{\tau}=\mathbf{m}T_s} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}T_s}} \mathcal{R}_{x_c}^\alpha(\mathbf{m}T_s) e^{j2\pi\alpha kT_s} \\ &= \sum_{\zeta \in W} \mathcal{R}_{x_c, \zeta}(\mathbf{m}T_s) e^{j2\pi\alpha_\zeta(\mathbf{m}T_s)kT_s}.\end{aligned}\quad (3.187)$$

La funzione $\tilde{\mathcal{R}}'_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})$ è quasi periodica rispetto a k e, poichè il termine residuo $\tilde{l}_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})$ non contiene alcuna componente sinusoidale additiva, si ha che $\tilde{\mathcal{R}}'_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})$ coincide con $\tilde{\mathcal{R}}_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})$, che è la componente quasi periodica contenuta in $\tilde{L}_x(\mathbf{1}k + \mathbf{m})$.

L'insieme $\mathcal{A}_{\mathbf{m}T_s}$ è definito come

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathbf{m}T_s} &\triangleq \{\alpha \in \mathbb{R} : \mathcal{R}_{x_c}^\alpha(\mathbf{m}T_s) \neq 0\} \\ &= \bigcup_{\zeta \in W} \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \alpha_\zeta(\mathbf{m}T_s)\} \\ &= \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha = (\tilde{\alpha} + p)f_s, \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}'_\mathbf{m} \right\}\end{aligned}\quad (3.188)$$

con

$$\tilde{\mathcal{A}}'_\mathbf{m} \triangleq \{\tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[: \tilde{\alpha} = (\alpha/f_s) \bmod 1, \quad \alpha \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}T_s}\}. \quad (3.189)$$

L'operazione mod b nella (3.189) denota l'operazione di modulo con i valori nell'intervallo $[-b/2, b/2[$.

Si può dimostrare che i CTMF del segnale campionato sono legati ai CTMF del segnale tempo continuo $x_c(t)$ dalla relazione

$$\tilde{\mathcal{R}}_x^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{R}}_{x_c}^{(\tilde{\alpha}+p)f_s}(\mathbf{m}T_s) \quad (3.190)$$

che estende al caso GACS il risultato derivato in [22] per i segnali ACS.

Considerando la (3.189), si ha

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}k + \mathbf{m}) &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}'_m} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c}^{(\tilde{\alpha}+p)f_s}(\mathbf{m}T_s) e^{j2\pi\tilde{\alpha}f_s k T_s} \\ &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}'_m} \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) e^{j2\pi\tilde{\alpha}k}.\end{aligned}\quad (3.191)$$

Il segnale campionato $x(k)$ è ACS, sia nel caso in cui il segnale GACS $x_c(t)$ è ACS che nel caso in cui non lo è, indipendentemente dal fatto che l'insieme del segnale a tempo continuo $\mathcal{A} \triangleq \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau$ sia o non numerabile. Si ha che

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}} &\triangleq \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{m}} \\ &= \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}T_s}} \{\tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[: \\ &\quad \tilde{\alpha} = (\alpha/f_s) \bmod 1, \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c}^\alpha(\mathbf{m}T_s) \neq 0 \\ &= \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N} \bigcup_{\zeta \in W} \{\tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[: \\ &\quad \tilde{\alpha} = \alpha_\zeta(\mathbf{m}T_s)T_s \bmod 1, \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c, \zeta}(\mathbf{m}T_s) \neq 0\}.\end{aligned}\quad (3.192)$$

Si noti che $\tilde{\mathcal{A}}$ è un insieme numerabile poichè è ottenuto come unione di insiemi numerabili $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{m}}$ con \mathbf{m} appartenete all'insieme numerabile \mathbb{Z}^N .

I CTMF di un segnale GACS a tempo discreto ottenuto campionando un segnale GACS possono essere espressi in termini dei suoi GCTMF

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{m}) &= \sum_{(\zeta, \mathbf{m}) \in X_{\tilde{\alpha}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c, \zeta}(\mathbf{m}T_s) \\ &= \sum_{\zeta \in W} \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c, \zeta}(\mathbf{m}T_s) \delta_{[\alpha_\zeta(\mathbf{m}T_s)T_s - \tilde{\alpha}] \bmod 1}\end{aligned}\quad (3.193)$$

dove

$$\begin{aligned}X_{\tilde{\alpha}} &\triangleq \left\{ (\zeta, \mathbf{m}) \in W \times \mathbb{Z}^N : \right. \\ &\quad \left. \alpha_\zeta(\mathbf{m}T_s)T_s = \tilde{\alpha} \bmod 1, \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c, \zeta}(\mathbf{m}T_s) \neq 0 \right\}.\end{aligned}\quad (3.194)$$

Sebbene i TMF a tempo discreto sono la versione campionata dei TMF a tempo continuo, in generale per i CTMF si ha

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}} \neq \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c}^{\alpha}(\tau)|_{\tau=\mathbf{m}T_s, \alpha=\tilde{\alpha}f_s} \quad (3.195)$$

a causa della presenza dell'aliasing nel dominio della frequenza di ciclo.

Dalla (3.190) segue che la versione campionata del CTMF di ordine N ad una data frequenza di ciclo α non è affetta da aliasing se e solo se non c'è alcuna frequenza di ciclo di $x_c(t)$ che differisce da α di un intero multiplo della frequenza di campionamento f_s . Una condizione necessaria e sufficiente che assicura assenza di aliasing nell'intero dominio delle frequenze di ciclo è che la frequenza di campionamento sia sufficientemente elevata che tutte le frequenze di ciclo del segnale tempo continuo $x_c(t)$ appartengono all'intervallo $[-f_s/2, f_s/2]$. Infatti, in tale caso, solamente il termine $p = 0$ nella (3.190) può essere differente da zero e, inoltre, risulta che

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c}^{\alpha}(\tau)|_{\tau=\mathbf{m}T_s, \alpha=\tilde{\alpha}f_s} \quad \forall \tilde{\alpha} \in [-1/2, 1/2[, \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N. \quad (3.196)$$

Nel caso particolare di un segnale ACS a tempo continuo la condizione necessaria e sufficiente che assicura assenza di aliasing sull'intero dominio delle frequenze di ciclo per i CTMF di ordine N è che il segnale sia a banda strettamente limitata minore di $f_s/2N$, poichè, in tale caso, tutte le frequenze di ciclo di ordine N sono minori di $f_s/2$. Nel caso più generale dei segnali GACS una condizione sufficiente che assicura assenza di aliasing è

$$|\alpha_{\zeta}(\mathbf{m}T_s)T_s| < \frac{1}{2} \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N \text{ e } \forall \zeta \in W \text{ tale che } \mathcal{R}_{\mathbf{x}_c, \zeta}(\mathbf{m}T_s) \neq 0. \quad (3.197)$$

Per i GCTCF di una serie a tempo discreto costituita dai campioni di un segnale a tempo continuo si ha

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}_c}^{(\tilde{\beta}+p)f_s}(\mathbf{m}T_s) \quad (3.198)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\beta}}(\mathbf{m}) &= \sum_{(\xi, \mathbf{m}) \in Y_{\tilde{\beta}}} \mathcal{C}_{\mathbf{x}_c, \xi}(\mathbf{m}T_s) \\ &= \sum_{\xi \in W_C} \mathcal{C}_{\mathbf{x}_c, \xi}(\mathbf{m}T_s) \delta_{[\beta_{\xi}(\mathbf{m}T_s)T_s - \tilde{\beta}] \bmod 1} \end{aligned} \quad (3.199)$$

dove

$$Y_{\tilde{\beta}} \triangleq \left\{ (\xi, \mathbf{m}) \in W_C \times \mathbb{Z}^N : \right. \\ \left. \beta_{\xi}(\mathbf{m}T_s)T_s = \tilde{\beta} \bmod 1, \mathcal{C}_{\mathbf{x}_c, \xi}(\mathbf{m}T_s) \neq 0 \right\}. \quad (3.200)$$

Capitolo 4

Prestazioni asintotiche di un nuovo algoritmo di sincronizzazione

In un sistema di comunicazione digitale è possibile considerare una gerarchia di problemi di sincronizzazione [8]. Il ricevitore, per demodulare coerentemente il segnale ricevuto e generare la versione in banda base, ha bisogno di una portante di riferimento: è il problema della *sincronizzazione di portante* (*carrier synchronization*) che riguarda la generazione di una portante con fase prossima a quella del segnale trasmesso. Il problema di sincronizzare l'orologio del ricevitore con la sequenza dei simboli del segnale in banda base è chiamato *sincronizzazione di bit* (*bit synchronization*). Seguono, in questa gerarchia, i problemi di *sincronizzazione di parola, trama e pacchetto* (*word, frame, packet-synchronization*) in funzione del tipo di sistema preso in considerazione. Questi ultimi problemi vengono, usualmente, risolti progettando opportunamente il messaggio attraverso la ripetizione di parole e bit nella sequenza per scopi di sincronizzazione. Per utilizzare in maniera efficiente la potenza trasmessa, la sincronizzazione di portante e di bit deve essere effettuata senza la trasmissioni di componenti non modulate della portante sinusoidale.

Un'alternativa è costituita dagli algoritmi detti *blind* o non *data-aided* che recuperano i parametri utili per la sincronizzazione utilizzando il segnale ricevuto ed i parametri statistici del segnale di informazione.

Molti algoritmi blind utilizzano le proprietà di ciclostazionarietà

possedute da quasi tutti i segnali modulati, poichè, a differenza delle ordinarie statistiche stazionarie, le statistiche cicliche (come la funzione di autocorrelazione ciclica e la funzione di autocorrelazione ciclica coniugata) conservano l'informazione sulla fase.

Sia $x(t)$ una serie temporale a valori reali ACS in senso lato del secondo ordine; il suo prodotto tempo ritardo del secondo ordine $x(t)x(t+\tau)$ può essere decomposto nella somma della sua componente quasi periodica e di un termine residuo $l_x(t, \tau)$ che non contiene alcun termine additivo sinusoidale:

$$\begin{aligned} x(t)x(t+\tau) &= E^{\{\alpha\}} \{x(t)x(t+\tau)\} + l_x(t, \tau) \\ &= \sum_{\alpha \in A} R_x^\alpha(\tau) e^{j2\pi\alpha t} + l_x(t, \tau) \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove

$$\langle l_x(t, \tau) e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t \equiv 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Per i segnali di comunicazione, le frequenze di ciclo $\alpha \in A$ sono legate a parametri quali la frequenza della portante sinusoidale, la frequenza di simbolo, la frequenza di campionamento. L'operazione di estrazione della componente quasi periodica fornisce un segnale utile per problemi di sincronizzazione. In generale si ha che trasformazioni non lineari tempo invarianti del secondo ordine o di ordine superiore generano serie temporali contenenti componenti sinusoidali additive le cui frequenze sono le frequenze di ciclo del secondo ordine o di ordine superiore del segnale originale.

Algoritmi che sfruttano le proprietà di ciclostazionarietà sono stati proposti ed analizzati in [3], [4], [14], [25]-[29], [35]. In particolare in [3], [25], [29] è proposto uno stimatore dell'offset di frequenza e del Doppler shift (carrier-frequency-offset(CFO)), indotti da derivate temporali degli oscillatori locali e dal moto relativo tra ricevitore e trasmettitore; tale stimatore è basato sulla massimizzazione, rispetto alla frequenza di ciclo, della norma al quadrato della funzione di autocorrelazione ciclica (Conjugate Cyclic Autocorrelation Norm (CCAN)). In [3] si è dimostrato che tale stimatore è asintoticamente gaussiano, consistente in media quadratica (cioè l'errore in media quadratica tende a zero), con varianza asintotica $\mathcal{O}(N^{-3})$ con N pari alla dimensione del campione preso in esame. La tecnica proposta in [25], [29] nel caso multiutente utilizza gli spostamenti di frequenza stimati per ottenere le frequenze di ciclo

coniugate del segnale ricevuto. Tali frequenze di ciclo sono poi inserite negli stimatori delle statistiche cicliche utilizzati per stimare i rimanenti parametri, quali ampiezze, ritardi e fasi. Poichè gli stimatori delle statistiche cicliche sono molto sensibili agli errori nelle valutazioni delle frequenze di ciclo, un nuovo stimatore detto proiezione dell'autocorrelazione ciclica coniugata (Conjugate Cyclic Autocorrelation Projection (CCAP)) è stato proposto nel caso del singolo utente. Esso è basato sulla massimizzazione, rispetto alla frequenza di ciclo coniugata, della proiezione della funzione di autocorrelazione ciclica coniugata del segnale ricevuto sull'autocorrelazione ciclica coniugata vera. Le stime dell'ampiezza, del ritardo e della fase sono ottenute utilizzando l'algoritmo proposto in [25], [29] nel caso del singolo utente. Il nuovo stimatore ha prestazioni superiori al precedente in quanto quest'ultimo realizza la stima massimizzando rispetto alla frequenza di ciclo coniugata la norma al quadrato della funzione di autocorrelazione ciclica coniugata, cioè, utilizzando un riferimento rumoroso per la proiezione.

In questo capitolo sarà descritta l'analisi delle prestazioni asintotiche del metodo CCAP. In particolare, sarà provata che CCAP è asintoticamente gaussiano e consistente in media quadratica, con varianza asintotica del tipo $\mathcal{O}(N^{-3})$; da ciò deriva che gli stimatori dell'ampiezza, del ritardo e della fase sono a loro volta consistenti. Inoltre, saranno presentate alcune simulazioni che mostrano che, per valori finiti di N , la varianza dello stimatore CCAP è più piccola di quella del precedente stimatore. In questo capitolo è stato adottato l'approccio stocastico per descrivere le prestazioni asintotiche dello stimatore del Doppler shift: tale approccio consente di interpretare in maniera più intuitiva i risultati raggiunti.

4.1 Algoritmo di stima

Consideriamo l'involuppo complesso del segnale ricevuto a tempo continuo

$$y_a(t) = Ae^{j\varphi}x_a(t - d_a)e^{j2\pi\nu_a t} + w_a(t) \quad (4.3)$$

dove $w_a(t)$ è il rumore additivo, $x_a(t)$ il segnale trasmesso, A , φ , d_a e ν_a sono l'ampiezza, la traslazione in fase, il ritardo temporale e lo spostamento in frequenza, rispettivamente. Se il segnale $y_a(t)$ è uniformemente campionato con periodo di campionamento $T_s = 1/f_s$, si

ottiene il segnale a tempo discreto

$$y(n) \triangleq y_a(t)|_{t=nT_s} = Ae^{j\varphi} x_d(n) e^{j2\pi\nu n} + w(n) \quad (4.4)$$

dove $x_d(n) \triangleq x_a(t - d_a)|_{t=nT_s}$, $w(n) \triangleq w_a(t)|_{t=nT_s}$ e $\nu \triangleq \nu_a T_s$.

Assumendo che $x_a(t)$ e $w_a(t)$ sono a media nulla e statisticamente indipendenti, la funzione di autocorrelazione ciclica e la funzione di autocorrelazione ciclica coniugata del segnale $y(n)$ sono date da

$$\begin{aligned} r_{yy^*}^\alpha(m) &\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \mathbb{E} \{y(n+m)y^*(n)\} e^{-j2\pi\alpha n} \\ &= A^2 e^{-j2\pi\alpha d} r_{xx^*}^\alpha(m) e^{j2\pi\nu m} + r_{ww^*}^\alpha(m) \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} r_{yy}^\beta(m) &\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \mathbb{E} \{y(n+m)y(n)\} e^{-j2\pi\beta n} \\ &= A^2 e^{-j2\pi(\beta-2\nu)d} e^{j2\varphi} r_{xx}^{\beta-2\nu}(m) e^{j2\pi\nu m} + r_{ww}^\beta(m) \end{aligned} \quad (4.6)$$

rispettivamente, nell'ipotesi che non ci siano frequenze di ciclo o frequenze di ciclo coniugate del segnale $x_a(t)$ le cui ampiezze siano superiori a $f_s/2$ (evitando così il problema dell'aliasing nel dominio delle frequenze cicliche [22]). Nelle (4.5) e (4.6) $d \triangleq d_a/T_s$ non è necessariamente un numero intero e $r_{xx^*}^\alpha(m)$ e $r_{xx}^\beta(m)$ sono le funzioni di autocorrelazione ciclica e ciclica coniugata del segnale $x(n) \triangleq x_a(t)|_{t=nT_s}$.

Nelle ipotesi che il segnale di disturbo $w(n)$ non presenti né ciclostazionarietà alla frequenza di ciclo α né ciclostazionarietà coniugata alla frequenza di ciclo β , cioè

$$r_{ww^*}^\alpha(m) \equiv r_{ww}^\beta(m) \equiv 0 \quad (4.7)$$

le equazioni (4.5) e (4.6) forniscono relazioni utili per ricavare un algoritmo fortemente immune al rumore e all'interferenza, indipendentemente dall'estensione della sovrapposizione temporale e spettrale dei segnali $x(n)$ e $w(n)$. Anche se il termine di disturbo $w(n)$ può contenere, in

generale, sia rumore stazionario che interferenza non stazionaria. L'assunzione (4.7) può facilmente essere soddisfatta, poichè è verificata nell'ipotesi in cui ci sia almeno una frequenza di ciclo, coniugata o non, del segnale utile e della sua versione traslata in frequenza che sia differente dalle frequenze di ciclo, coniugate o non, del segnale interferente. Inoltre, il rumore stazionario non fornisce alcun contributo alle statistiche cicliche di $w(n)$.

Siano $w_a(t)$ un segnale circolare (cioè con funzione di correlazione coniugata nulla) ed il segnale $x_a(t)$ un segnale non circolare con ciclostazionarietà coniugata con periodo QT_s . Si avrà che $w(n)$ è circolare (quindi la sua funzione di correlazione coniugata $r_{ww}(n, m) \triangleq E\{w(n+m)w(n)\} = 0$) e, inoltre, $x(n)$ è non circolare e possiede ciclostazionarietà coniugata con periodo Q . Allora la funzione di correlazione coniugata di $y(n)$ è

$$r_{yy}(n, m) = \sum_{k=0}^{Q-1} r_{xx}^{\beta_k}(m) A^2 e^{j2\varphi} e^{-j2\pi\beta_k d} e^{j2\pi\nu m} e^{j2\pi(\beta_k+2\nu)n} \quad (4.8)$$

dove $\beta_k \triangleq k/Q$.

Sia $\mathbf{y}_2(n) \triangleq [y(n-M)y(n), \dots, y(n+M)y(n)]^T$ il vettore *lag product* del secondo ordine. Il vettore correlogramma ciclico coniugato

$$\mathbf{r}_{yy,N}^{\beta} \triangleq \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \mathbf{y}_2(n) e^{-j2\pi\beta n} \quad (4.9)$$

è una stima del vettore di autocorrelazione ciclica coniugata $\mathbf{r}_{yy}^{\beta} \triangleq [r_{yy}^{\beta}(-M), \dots, r_{yy}^{\beta}(M)]^T$ alla frequenza di ciclo coniugata β , valutata sulla base del segnale ricevuto osservato su un intervallo di lunghezza $2N+1$.

Lo stimatore CCAP CFO proposto in [27] è

$$\hat{\omega}_N \triangleq \arg \max_{\omega \in I_0} |f_N(\omega)|^2 \quad (4.10)$$

con

$$\begin{aligned} f_N(\omega) &\triangleq \sum_{m=-M}^M r_{yy,N}^{\beta_k+2\omega}(m) e^{-j2\pi\omega m} r_{xx}^{\beta_k}(m)^* \\ &= \left[\mathbf{r}_{yy,N}^{\beta_k+2\omega}(m) \odot \mathbf{a}(\omega)^* \right]^T \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k*} \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove \odot denota il prodotto matriciale di Hadamard, $\mathbf{a}(\omega) \triangleq [e^{-j2\pi\omega M}, \dots, e^{j2\pi\omega M}]^T$ e β_k è una frequenza di ciclo coniugata (eventualmente nulla) di $x(n)$. Nella (4.10), $I_0 \triangleq [\beta_k - \Delta\beta/2, \beta_k + \Delta\beta/2]$ con $\Delta\beta$ e la traslazione in frequenza ν che soddisfano le condizioni $|\nu| \leq \Delta\beta/4$ e con $\Delta\beta < 1/Q$, in maniera tale che ci sia in ogni intervallo di ricerca una sola frequenza di ciclo utile.

La funzione $|f_N(\omega)|$ rappresenta l'ampiezza della proiezione della stima della funzione di autocorrelazione ciclica coniugata $\mathbf{r}_{yy,N}^{\beta_k+2\omega}(m)$ sulla sua espressione asintotica ($N \rightarrow \infty$) ottenuta ponendo $\beta = \beta_k + 2\omega = \beta_k + 2\nu$ nella (4.6) con $r_{ww}^\beta(m) \equiv 0$. Così, al limite per $N \rightarrow \infty$, $|f_N(\omega)|$ è non nulla solo in corrispondenza dell'insieme discreto di valori di ω tali che $\beta = \beta_k + 2\omega$ sono le frequenze di ciclo coniugate del segnale $y(n)$, cioè è diversa da zero solo per $\omega = \nu$, nell'ipotesi che $r_{ww}^\beta(m) \equiv 0$ per $\beta \in I_0$. Così, per $N \rightarrow \infty$, $|f_N(\omega)|$ ha un picco per $\omega = \nu$, e, per valori finiti di N , una stima ω_N dello spostamento in frequenza può essere ottenuta localizzando il massimo della funzione $|f_N(\omega)|$ per $\omega \in I_0$.

Si noti che per un intervallo di osservazione finito lo stimatore CCAP CFO ha prestazioni migliori del CCAN. Infatti la stima CCAN CFO è ottenuta massimizzando la funzione $\omega \rightarrow \|\mathbf{r}_{yy,N}^{\beta_k+2\omega}\|^2$ che è la proiezione della stima della funzione di autocorrelazione ciclica coniugata su se stessa. Cioè, per un intervallo di osservazione finito, il segnale di riferimento è una versione rumorosa di quello adottato in (4.11).

Una volta che è stata ottenuta la stima dello spostamento in frequenza, le stime dell'ampiezza, del ritardo e della fase possono essere realizzate considerando la versione per singolo utente dell'algoritmo proposto in [25], [29].

Si assuma che α_x sia una frequenza di ciclo nota non nulla di $x(n)$. L'equazione (4.5) (con $r_{ww}^{\alpha_x} \equiv 0$) suggerisce che la stima dell'ampiezza e del ritardo possono realizzarsi minimizzando rispetto a γ la funzione

$$g(\gamma, \gamma^*) \triangleq \left\| \mathbf{r}_{yy^*,N}^{\alpha_x} - \gamma \mathbf{r}_{xx^*}^{\alpha_x} \odot \mathbf{a}(\hat{\omega}_N) \right\|. \quad (4.12)$$

Infatti, per $N \rightarrow \infty$ e per $\hat{\omega}_N = \nu$, risulta che $g(\gamma, \gamma^*) \equiv 0$ per

$$\gamma = A^2 e^{-j2\pi\alpha_x d}. \quad (4.13)$$

Per valori finiti di N , il valore di γ che minimizza $g(\gamma, \gamma^*)$ è dato da

$$\gamma_{\text{opt}} = \left[\mathbf{r}_{yy^*,N}^{\alpha_x} \right]^T \left[\mathbf{r}_{xx^*}^{\alpha_x} \odot \mathbf{a}(\hat{\omega}_N) \right]^* \|\mathbf{r}_{xx^*}^{\alpha_x}\|^{-2}. \quad (4.14)$$

Considerando la (4.13), le stime dell'ampiezza A e del ritardo d sono date da

$$\hat{A} = \sqrt{|\gamma_{\text{opt}}|} \quad (4.15)$$

e

$$\hat{d} = -\angle[\gamma_{\text{opt}}]/2\pi\alpha_x, \quad (4.16)$$

dove $\angle[\cdot]$ è la fase di un numero complesso.

Si assuma che β_x sia una frequenza di ciclo coniugata nota di $x(n)$. L'equazione (4.6) (con $r_{ww}^{\beta_x}(\tau) \equiv 0$ per $\beta \in [\beta_x - \Delta\beta/2, \beta_x + \Delta\beta/2]$) suggerisce che la stima della fase si realizzi minimizzando rispetto a $\bar{\gamma}$ la funzione

$$h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*) \triangleq \left\| \mathbf{r}_{yy,N}^{\beta_x+2\hat{\omega}_N} - \bar{\gamma} \mathbf{r}_{xx}^{\beta_x} \odot \mathbf{a}(\hat{\omega}_N) \right\|. \quad (4.17)$$

Infatti, per $N \rightarrow \infty$ e per $\hat{\omega}_N = \nu$, risulta che $h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*) \equiv 0$ per

$$\bar{\gamma} = A^2 e^{-j2\pi\beta_x d} e^{j2\varphi}. \quad (4.18)$$

Per valori finiti di N , il valore di $\bar{\gamma}$ che minimizza $h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*)$ è dato da

$$\bar{\gamma}_{\text{opt}} = \left[\mathbf{r}_{yy,N}^{\beta_x+2\hat{\omega}_N} \right]^T \left[\mathbf{r}_{xx}^{\beta_x} \odot \mathbf{a}(\hat{\omega}_N) \right]^* \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_x}\|^{-2}. \quad (4.19)$$

Considerando la (4.13) e la (4.18), la stima della fase è data da φ è

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{2} \angle \left[\frac{\bar{\gamma}_{\text{opt}}}{\gamma_{\text{opt}}} e^{j2\pi(\beta_x - \alpha_x)\hat{d}} \right]. \quad (4.20)$$

E' facile dimostrare che i punti stazionari così determinati per entrambe le funzioni (4.12), (4.17) sono punti di minimo.

Per evitare ambiguità nella stime (4.16) e (4.20) devono valere le seguenti ipotesi:

$$|d| \leq 1/2|\alpha_x| \quad (4.21)$$

$$|\varphi| \leq \pi/2 \quad (4.22)$$

In [29] è stato provato che, per un'opportuna scelta della frequenza di ciclo α_x , la condizione espressa dalla (4.21) non costituisce un limite per la sincronizzazione; la (4.22) porta ad una ambiguità di fase di π radianti che non crea problemi al ricevitore se al segnale trasmesso è applicata una codifica differenziale.

4.2 Analisi delle prestazioni asintotiche dello stimatore CCAP CFO

In questo paragrafo sarà illustrata l'analisi delle prestazioni asintotiche del nuovo algoritmo di stima; sarà provato che lo stimatore CFO è consistente in media quadratica con varianza $\mathcal{O}(N^{-3})$. Tale comportamento asintotico consente di provare la consistenza delle stime dei rimanenti parametri. I primi risultati sono stati presentati in [6].

Consideriamo l'espansione in serie di Taylor della derivata di $|f_N(\omega)|^2$ con termine residuo di Lagrange:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\omega} |f_N(\omega)|^2 \right|_{\omega=\hat{\omega}_N} &= \left. \frac{d}{d\omega} |f_N(\omega)|^2 \right|_{\omega=\nu} \\ &+ \left. \frac{d^2}{d\omega^2} |f_N(\omega)|^2 \right|_{\omega=\tilde{\omega}_N} (\hat{\omega}_N - \nu) \end{aligned} \quad (4.23)$$

dove $\tilde{\omega}_N = \nu + \eta_N(\hat{\omega}_N - \nu)$ e $\eta_N \in [0, 1]$. Ponendo $[d|f_N(\omega)|^2/d\omega]_{\omega=\hat{\omega}_N} = 0$, segue che

$$(2N+1)^{3/2}(\hat{\omega}_N - \nu) = -\mathcal{A}_N^{-1} \mathcal{B}_N \quad (4.24)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &\triangleq (2N+1)^{-2} \left. \frac{d^2}{d\omega^2} |f_N(\omega)|^2 \right|_{\omega=\tilde{\omega}_N} \\ &= 2(2N+1)^{-2} \text{Re} \left\{ f_N''(\tilde{\omega}_N) f_N(\tilde{\omega}_N)^* \right\} \\ &+ 2(2N+1)^{-2} |f_N'(\tilde{\omega}_N)|^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_N &\triangleq (2N+1)^{-\frac{1}{2}} \left. \frac{d}{d\omega} |f_N(\omega)|^2 \right|_{\omega=\nu} \\ &= 2(2N+1)^{-\frac{1}{2}} \text{Re} \left\{ f_N'(\nu) f_N(\nu)^* \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

con $f_N'(\omega)$ e $f_N''(\omega)$ derivate del primo e del secondo ordine di $f_N(\omega)$.

Il *lag product* del secondo ordine $\mathbf{y}_2(n)$ può essere decomposto nella somma di un termine periodico (il vettore della correlazione coniugata) ed un termine residuo $\mathbf{e}(n)$ non contenente alcuna componente additiva

sinusoidale di potenza finita

$$\mathbf{y}_2(n) = \sum_{h=0}^{Q-1} \mathbf{r}_{xx}^{\beta_h} \odot \mathbf{a}(\boldsymbol{\nu}) e^{j2\pi(\beta_h+2\nu)n} + \mathbf{e}(n) \quad (4.27)$$

dove, allo scopo di ricavare le prestazioni asintotiche senza perdere di generalità, è stato assunto $A = 1$, $\varphi = 0$ e $d = 0$.

In ipotesi molto generali sul termine di disturbo $w(n)$, il termine residuo $\mathbf{e}(n)$ soddisfa la seguente condizione di *mixing*:

$$\forall L, \exists \mathcal{M}_L < \infty, \forall n_1, \forall (\nu_1, \dots, \nu_L) \in \{0, 1\}^L$$

$$\sum_{(n_2, \dots, n_L) \in \mathbb{Z}^{L-1}} \|\text{cum}(\mathbf{e}^{(\nu_1)}(n_1), \dots, \mathbf{e}^{(\nu_L)}(n_L))\| \leq \mathcal{M}_L. \quad (4.28)$$

Tale condizione esprime la proprietà che campioni sufficientemente separati sono approssimativamente indipendenti; tale ipotesi è soddisfatta dalla quasi totalità dei segnali a memoria finita incontrati nella pratica.

Sostituendo la (4.27) nella (4.9) si ha

$$\mathbf{r}_{yy,N}^{\beta_k+2\omega} = \sum_{h=0}^{Q-1} \mathbf{r}_{xx}^{\beta_h} \odot \mathbf{a}(\boldsymbol{\nu}) \mathcal{D}_N(\beta_K + 2\omega - \beta_h - 2\nu) + \mathbf{s}_N^{(0)}(\beta_k + 2\omega) \quad (4.29)$$

dove

$$\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha) \triangleq \frac{1}{(2N+1)^{K+1}} \sum_{n=-N}^N \mathbf{e}(n) n^K e^{-j2\pi\alpha n} \quad (4.30)$$

$$\mathcal{D}_N(\xi) \triangleq \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^N e^{-j2\pi\xi n} = \frac{\sin(\pi\xi(2N+1))}{(2N+1)\sin(\pi\xi)}. \quad (4.31)$$

Si avranno, seguendo le linee guida delle dimostrazioni tracciate nell'appendice C, i seguenti risultati:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N(\hat{\omega}_N - \nu) = 0 \quad \text{con probabilità 1} \quad (4.32)$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\omega}_N = \nu \quad \text{con probabilità 1.} \quad (4.33)$$

Considerando i risultati delle appendici A e B, si ha che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\tilde{\omega}_N) = \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_k}\|^2 \quad (4.34)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-1} f'_N(\tilde{\omega}_N) = 0 \quad (4.35)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-2} f''_N(\tilde{\omega}_N) = -\frac{4\pi^2}{3} \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_k}\|^2. \quad (4.36)$$

Sostituendo le (4.34), (4.35), (4.36) nella (4.25), si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_N = -\frac{8\pi^2}{3} \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_k}\|^4. \quad (4.37)$$

Considerando le (4.47), (4.48), (4.50), si ha per il termine B_N

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\nu) = \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_k}\|^2 \quad (4.38)$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-1/2} f'_N(\nu) = -j4\pi [\boldsymbol{\zeta} \odot \mathbf{a}^*(\nu)]^T \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k*} \quad (4.39)$$

dove

$$\boldsymbol{\zeta} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{\frac{1}{2}} \mathbf{s}_N^{(1)}(\beta_k + 2\nu) \quad (4.40)$$

è un vettore complesso gaussiano e a media nulla.

Sostituendo (4.38), (4.39), (4.40) nella (4.26) si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{B}_N = -8\pi \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_k}\|^2 \text{Re} \left\{ j [\boldsymbol{\zeta} \odot \mathbf{a}^*(\nu)]^T \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k*} \right\}. \quad (4.41)$$

Infine, usando la (4.37) e la (4.41) nella (4.26) si ha

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{\frac{3}{2}} (\hat{\omega}_N - \nu) &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_N^{-1} \mathcal{B}_N \\ &= -\frac{3}{\pi} \|\mathbf{r}_{xx}^{\beta_k}\|^{-2} \text{Re} \left\{ j [\boldsymbol{\zeta} \odot \mathbf{a}(\nu)]^T \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k*} \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Si ha, quindi, che l'errore di stima del CFO è asintoticamente gaussiano con media nulla e varianza $\mathcal{O}(N^{-3})$. Tale comportamento asintotico assicura che il correlogramma ciclico (coniugato) alla frequenza di ciclo stimata (coniugata) $\beta_k + 2\hat{\omega}_N$ è una stima consistente in media quadratica della funzione di autocorrelazione ciclica (coniugata) alla frequenza

di ciclo $\beta_k + 2\nu$. Di conseguenza, poichè i parametri γ_{opt} e $\hat{\gamma}_{\text{opt}}$ sono combinazioni lineari degli elementi dei vettori del correlogramma ciclico e del correlogramma ciclico coniugato, segue che le stime di ampiezza, ritardo e fase sono a loro volta consistenti.

Consideriamo la media temporale simmetrica delle quantità definite in [3]

$$\begin{aligned}\bar{A}_N &\triangleq (2N+1)^{-2} \frac{d^2}{d\beta^2} \left\| \mathbf{r}_{yy,N}^\beta \right\|^2 \Big|_{\beta=\tilde{\beta}_N} \\ \bar{B}_N &\triangleq (2N+1)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\beta} \left\| \mathbf{r}_{yy,N}^\beta \right\|^2 \Big|_{\beta=\beta_k+2\nu}\end{aligned}\quad (4.43)$$

dove $\tilde{\beta}_N = \beta_k + \eta_N(\hat{\beta}_N - \beta_k)$, $\eta_N \in [0, 1]$ e

$$\hat{\beta}_N \triangleq \arg \max_{\beta \in J_0} \left\| \mathbf{r}_{yy,N}^\beta \right\|^2 \quad (4.44)$$

con $J_0 \triangleq (\beta_k - 1/2Q, \beta_k + 1/2Q)$. Usando il risultato espresso dalla (4.40), si ha

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{A}_N &= -\frac{2\pi^2}{3} \left\| \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k} \right\|^2 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{B}_N &= -4\pi \text{Re} \left\{ j[\boldsymbol{\zeta} \odot \mathbf{a}^*(\boldsymbol{\nu})]^T \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k*} \right\}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Pertanto gli errori asintotici dello stimatore CCAP CFO $\hat{\omega}_N$ e dello stimatore CCAN CFO $\hat{\theta}_N \triangleq (\hat{\beta}_N - \beta_k)/2$ hanno la stessa caratterizzazione statistica; infatti si ha

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{\frac{3}{2}}(\hat{\theta}_N - \nu) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}(\hat{\beta}_N - (\beta_k + 2\nu)) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{A}_N^{-1} \bar{B}_N \\ &= -\frac{3}{\pi} \left\| \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k} \right\|^{-2} \text{Re} \left\{ j[\boldsymbol{\zeta} \odot \mathbf{a}^*(\boldsymbol{\nu})]^T \mathbf{r}_{xx}^{\beta_k*} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{\frac{3}{2}}(\hat{\omega}_N - \nu).\end{aligned}\quad (4.46)$$

Inoltre i due stimatori hanno la stessa asintotica varianza.

Nel prossimo paragrafo sono riportati i risultati delle simulazioni ed è mostrato che per valori finiti di N lo stimatore CCAP CFO ha prestazioni migliori di quelle dello stimatore CCAN.

4.3 Risultati delle simulazioni

Negli esperimenti effettuati, il segnale utile $x(n)$ è un segnale BPSK con impulso rettangolare e full duty cycle con fattore di sovracampionamento $Q = 4$ e $w(n)$ è un rumore gaussiano stazionario complesso e circolare. Nel primo esperimento, le deviazioni standard campionarie degli stimatori CFO considerati, valutate sulla base di 500 prove Montecarlo, sono riportate come funzioni del numero di simboli elaborati $N_s = (2N + 1)/Q$, con rapporto segnale rumore SNR fissato a $-10dB$. Sono stati analizzati i due casi $\beta_K = 1/Q$ (fig.4.1) e $\beta_K = 0$ (fig.4.2). In entrambi i casi è evidente che per valori elevati di N entrambi gli stimatori CFO hanno una varianza $\mathcal{O}(N^{-3})$ e inoltre il loro valore è lo stesso ed è uguale al valore asintotico derivato in [3]. Lo stimatore CCAP CFO supera in prestazioni lo stimatore CCAN CFO per bassi valori di N ; in particolare, in corrispondenza dei valori di soglia $N_s = 2^{12}$ per $\beta_k = 1/Q$ (fig.4.1), e $N_s = 2^{10}$ per $\beta_k = 0$ (fig.4.2).

Nel secondo esperimento l'errore efficace (sample root mean square (RMSE)) dello stimatore CFO considerato è stato valutato sulla base di 500 prove Montecarlo, ed è riportato in funzione dell'SNR, con $N_s = 2^{12}$ per $\beta_k = 1/Q$ (fig.4.3), e $N_s = 2^{10}$ per $\beta_k = 0$ (fig.4.4).

4.4 Appendice A: Risultati su $\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)$

Si può facilmente dimostrare che

$$d\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)/d\alpha = -j2\pi(2N + 1)\mathbf{s}_N^{(K+1)}(\alpha). \quad (4.47)$$

Nell'ipotesi che valga la (4.28) sulla sommabilità dei cumulanti del vettore processo $\mathbf{e}(n)$, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in [-1/2, 1/2[} \|\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)\| = 0, \quad \text{con probabilità } 1, \forall K. \quad (4.48)$$

Sia $\{\xi_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ una sequenza a valori reali tali che $\xi_N \in X$ con X insieme compatto contenuto nell'intervallo $[-1/2, 1/2[$ e si assuma che il

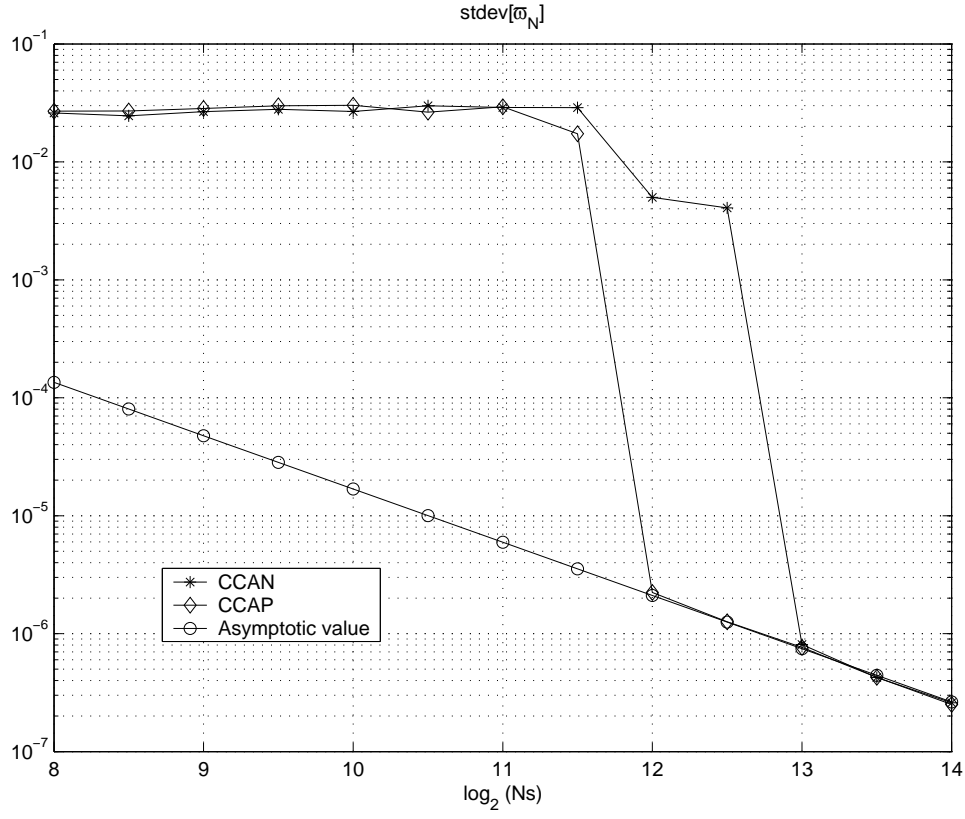


Figura 4.1: Deviazione standard degli stimatori con $\beta_K = 1/Q$:
* metodo CCAN, \diamond metodo CCAP, \circ valore asintotico teorico

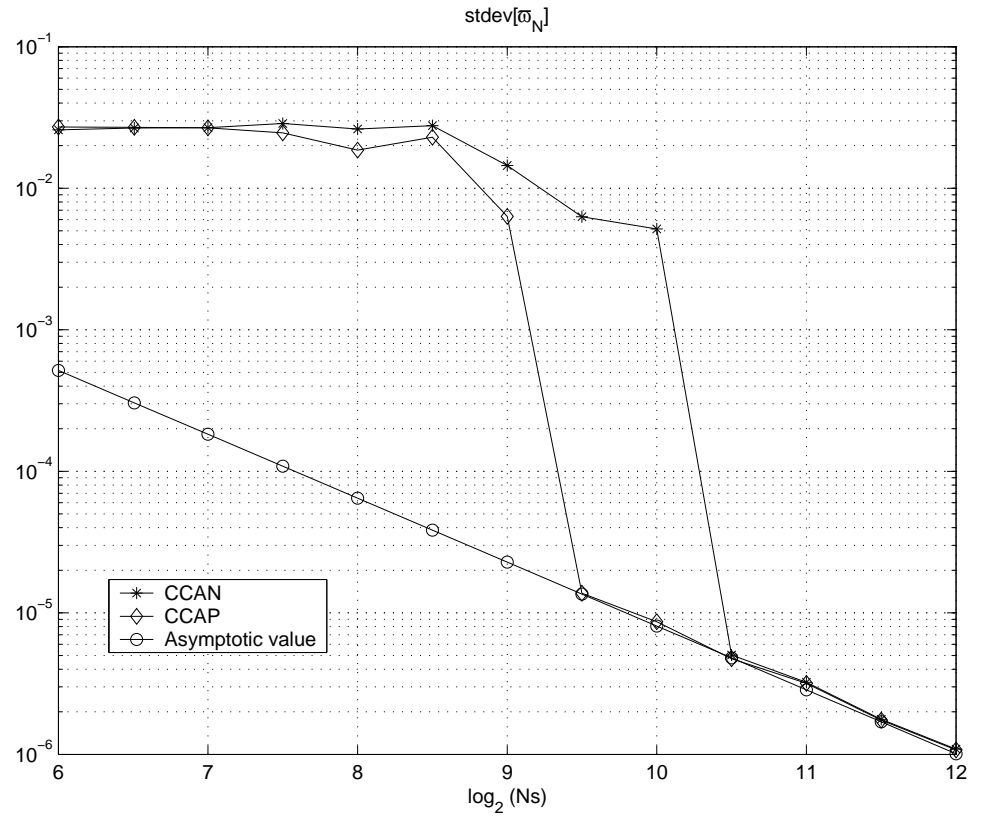


Figura 4.2: Deviazione standard degli stimatori con $\beta_K = 0$: * metodo CCAN, \diamond metodo CCAP, \circ valore asintotico teorico

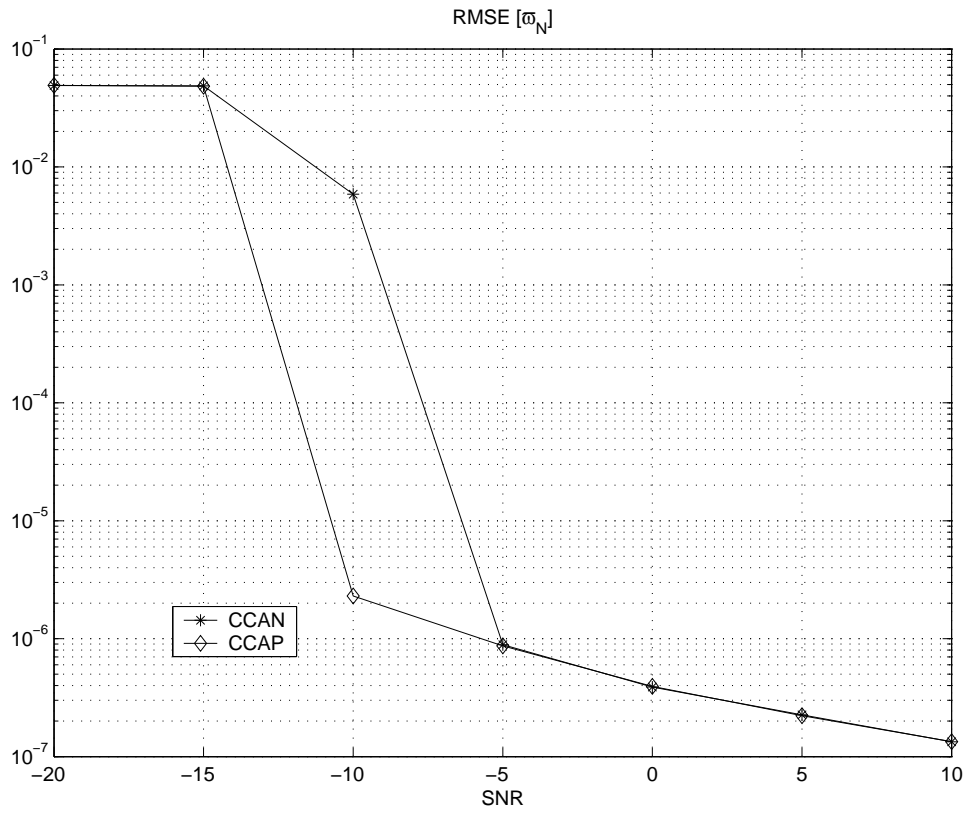


Figura 4.3: RMSE dello stimatore CFO con $\beta_K = 1/Q$, $N_s = 2^{12}$: * metodo CCAN, \diamond metodo CCAP

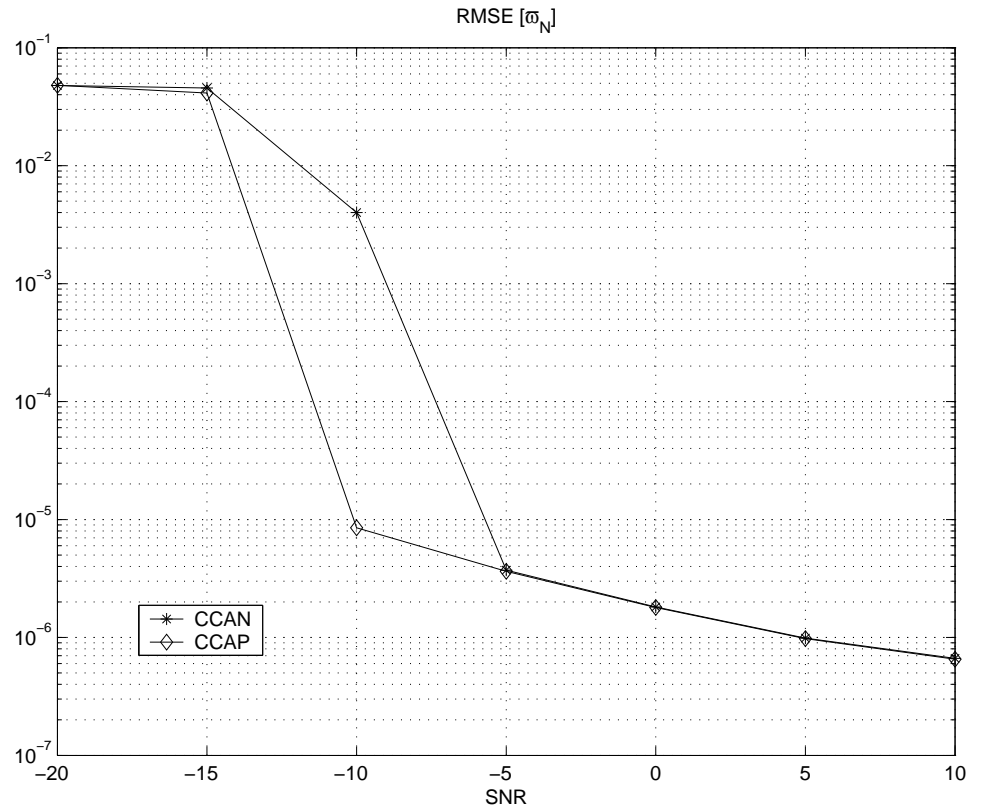


Figura 4.4: RMSE dello stimatore CFO con $\beta_K = 0$, $N_s = 2^{10}$:* metodo CCAN, \diamond metodo CCAP

limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N$ esiste. Si ha, allora,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}_N^{(K)}(\xi_N)(\alpha)\| = 0, \quad \text{con probabilità } 1, \forall K. \quad (4.49)$$

4.5 Appendice B: Risultati su $D_N(\xi)$

Siano $D'_N(\xi)$ e $D''_N(\xi)$, rispettivamente, la derivata prima e la derivata seconda di $D_N(\xi)$. Risulta che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-1/2} D'_N(\xi) = 0 \quad \forall \xi. \quad (4.50)$$

Sia $\{\xi_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ una sequenza a valori reali tali che $\xi_N \in X$ con X insieme compatto contenuto nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$. Se $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = 0$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} N\xi_N = 0$, allora si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\xi_N) = 1 \quad (4.51)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-1} D'_N(\xi_N) = 0 \quad (4.52)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-2} D''_N(\xi_N) = -\frac{\pi^2}{3} \quad (4.53)$$

altrimenti, se $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N \neq 0$, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\xi_N) = 0 \quad (4.54)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-1} D'_N(\xi_N) = 0. \quad (4.55)$$

4.6 Appendice C

Dimostrazione della 4.32. Si consideri la successione $\{\widehat{\omega}_N\}_{N \geq 0}$ appartenente all'insieme compatto \mathcal{A} interno all'intervallo $[-1/2, 1/2]$; per provare che essa converge a ν , è sufficiente provare che ogni successione $\{\widehat{\omega}_{\phi(N)}\}_{\phi(N) \geq 0}$ estratta dalla $\{\widehat{\omega}_N\}_{N \geq 0}$ converge a ν . Dalla definizione di $\widehat{\omega}_N$ si ha che $f_N(\widehat{\omega}_N) \geq f_N(\nu)$. Si consideri la quantità

$$\Delta f = \lim_{N \rightarrow \infty} [f_{\phi(N)}(\widehat{\omega}_{\phi(N)}) - f_{\phi(N)}(\nu)] \quad (4.56)$$

che è sempre non negativa. Detto ω_1 il limite della successione estratta $\{\widehat{\omega}_{\phi(N)}\}_{\phi(N) \geq 0}$, si prova, sfruttando i risultati dell'appendice A, che la quantità 4.56 è non negativa se e solo se $\omega_1 = \omega$. In maniera analoga, ma considerando la successione $\{N\widehat{\omega}_{\phi(N)}\}_{\phi(N) \geq 0}$, si prova la (4.33).

Capitolo 5

Algoritmo di sincronizzazione per segnali wide-band

In questo capitolo è proposto un algoritmo per la stima blind dei parametri di un segnale a larga banda in un sistema di comunicazione mobile [5]. L'ipotesi formulata di segnale a larga banda implica che deve essere considerato un fattore di scala a valore non unitario nel modello del segnale ricevuto anche per intervalli di osservazione di durata limitata. L'algoritmo di sincronizzazione presentato utilizza le proprietà di ciclostazionarietà e ciclostazionarietà coniugate per stimare il fattore di scala, l'offset in frequenza, l'ampiezza, la fase ed il ritardo del segnale ricevuto. I risultati delle simulazioni, presentate alla fine del capitolo, mettono a confronto le prestazioni di tale algoritmo con il metodo che adotta un modello a banda stretta per il segnale, cioè che assume un valore unitario per il fattore di scala, mostrando l'efficacia dell'algoritmo proposto.

5.1 Introduzione del modello a banda larga

Nel capitolo precedente per il segnale ricevuto è stato adottato il modello a banda stretta per il quale i parametri di interesse per la sincronizzazione, che devono essere opportunamente stimati per evitare severe degradazioni delle prestazioni, sono l'ampiezza, la fase e l'offset di frequenza. L'ampiezza tiene conto della potenza trasmessa e dell'at-

tenuazione introdotta dal canale, mentre la differenza di fase tra segnale trasmesso e segnale ricevuto è dovuta alla rotazione di fase introdotta dal canale ed al possibile disadattamento in fase tra gli oscillatori in ricezione ed in trasmissione; il ritardo è legato al ritardo di propagazione e l'offset in frequenza è dovuto all'effetto Doppler ed ad un disadattamento in frequenza fra gli oscillatori in ricezione ed in trasmissione.

In un sistema di comunicazioni a larga banda il canale, inoltre, introduce un fattore di scala non unitario nel segnale ricevuto [38]. Tale modello di canale è appropriato quando c'è moto relativo fra ricevitore e trasmettitore e la velocità radiale è tale che il prodotto banda del segnale per lunghezza dell'intervallo di osservazione non è molto più piccolo del rapporto fra la velocità di propagazione del mezzo e la velocità radiale [38]. Tale modello risulta appropriato nei moderni sistemi di comunicazione dove sempre più banda è impiegata per ottenere elevati bit rate ed, inoltre, lunghi intervalli di osservazione sono utilizzati per gli algoritmi blind di identificazione ed egualizzazione del canale o di rivelazione in ambienti fortemente corrotti dal rumore e da segnali interferenti.

Molti sono gli scenari in cui l'introduzione di un modello a larga banda si è rivelato di fondamentale importanza per modellare correttamente il fenomeno in esame. In [31] è evidenziato che la sorte della missione spaziale della sonda Cassini rischiava di essere gravemente compromessa da una mancata adozione del modello a larga banda; problemi di comunicazione tra la navicella spaziale Cassini e la sonda Huygens avrebbero potuto rendere vano il lavoro decennale di molti scienziati, lasciando Titano, il satellite più grande di Saturno, ancora avvolto nel mistero. Alla sonda spaziale Huygens, staccatasi dalla navicella Cassini, in moto intorno all'atmosfera di Titano, spettava il compito di penetrarne i densi strati, ricchi di idrocarburi, che nascondevano la superficie del pianeta. Alla velocità di 21000 chilometri all'ora, frenata da alcuni paracaduti, la sonda avrebbe dovuto compiere un viaggio di sola andata alla scoperta dei misteri della superficie di Titano raccogliendo fondamentali dati scientifici. I risultati dell'esplorazione della superficie di Titano avrebbero raggiunto la terra con una comunicazione a due stadi: la sonda Huygens è infatti troppo piccola per essere equipaggiata con un trasmettitore radio sufficientemente potente da raggiungere la terra; i dati raccolti, trasmessi alla navicella Cassini, avrebbero raggiunto il gruppo di impazienti scienziati sulla Terra utilizzando la principale antenna della Cassini, alta quattro metri. La comunicazione tra la sonda e

la sua navicella spaziale ha creato imprevisti problemi. Nella sua discesa verso la superficie di Titano, la velocità relativa di Huygens rispetto alla Cassini avrebbe dovuto raggiungere la velocità di 5,5 chilometri al secondo, determinando uno shift in frequenza pari a 38 kilohertz a causa dell'effetto Doppler. La modulazione adottata per la trasmissione dei dati era la BPSK con un tasso di 8192 bit al secondo. L'algoritmo di decodifica dei dati prevedeva un'ampia gamma di frequenze per rilevare correttamente la portante del segnale di Huygens, anche in presenza del Doppler shift, ma aveva completamente trascurato l'altro effetto dovuto al fenomeno del Doppler: la scalatura temporale che rendeva la velocità di trasmissione dei dati molto lontana dal valore nominale di 8192 bit al secondo. Il segnale trasmesso dalla sonda verso la navicella sarebbe stato compresso, la velocità di trasmissione sarebbe aumentata, poichè la durata di ogni bit sarebbe diminuita. Si scelse di modificare la traiettoria della navicella e della sonda prima che raggiungessero Titano; in particolare la sonda Cassini fu mantenuta più lontana da Titano durante la discesa della sonda, determinando una modifica geometrica fondamentale: la componente di maggiore decelerazione fu resa perpendicolare alla direzione di congiungimento Cassini-Huygens, annullando così gli eventuali effetti di scalatura temporale.

Le odierne tecniche di telecomunicazioni richiedono una banda sempre maggiore per ottenere elevati bit rate e lunghi intervalli di osservazione per gli algoritmi di stima ed egualizzazione in presenza di forti segnali interferenti. Se si considera, ad esempio, un segnale trasmesso in un sistema ad accesso multiplo a divisione di codice con circa duecento utenti, l'adozione di un valore unitario per il fattore di scala limita a qualche migliaio il massimo numero di bit che è possibile elaborare se la velocità del terminale mobile è di circa 100 Km all'ora. Volendo elaborare un numero maggiore di bit, diventa necessaria l'adozione del modello a larga banda per il segnale.

In questo capitolo è presentato un algoritmo basato sulla ciclostazionarietà per stimare l'ampiezza, lo shift di fase, il ritardo temporale, il fattore di scala e l'offset di frequenza del segnale ricevuto. Il fattore di scala e l'offset di frequenza modificano la frequenza di ciclo e la frequenza di ciclo coniugata del segnale trasmesso e, quindi, l'algoritmo proposto realizza la stima dell'offset di frequenza e del fattore di scala stimando la frequenza di ciclo e la frequenza di ciclo coniugata del segnale ricevuto. Poi, le frequenze di ciclo (coniugate) stimate sono

inserite nelle statistiche cicliche del secondo ordine utilizzate per stimare i rimanenti parametri. Per stimare ampiezza, fase e ritardo si effettuano due minimizzazioni di errori quadratici medi: il primo è tra lo spettro ciclico teorico e quello misurato; il secondo tra lo spettro ciclico coniugato teorico e quello misurato. Se vale l'ipotesi che il segnale trasmesso ha almeno una frequenza di ciclo (coniugata) non troppo vicina a quelle del segnale di disturbo, l'algoritmo proposto fornisce stime dei parametri incogniti che sono intrinsecamente immuni agli effetti del rumore e dell'interferenza. Quindi, nell'ipotesi che per le stime sia utilizzato un intervallo di osservazione sufficientemente lungo, nella pratica tale algoritmo è fortemente resistente al rumore ed all'interferenza. E' importante sottolineare che non è necessario formulare ipotesi di gaussianità per il rumore e che tale algoritmo continua ad essere valido in canali radio di comunicazione, come quello indoor e quello urbano, dove sono presenti segnali interferenti non noti a banda stretta e rumori impulsivi [37].

5.2 Modello del segnale ricevuto

In un sistema di comunicazione mobile se la velocità radiale fra il trasmettitore ed il ricevitore può essere assunta costante all'interno dell'intervallo di osservazione, allora l'involuppo complesso del segnale ricevuto è [38, pp. 240-242]

$$\begin{aligned} r(t) &= y(t) + n(t) \\ &= Ae^{j\varphi} x(st - d) e^{j2\pi\nu t} + n(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

dove $n(t)$ è il rumore additivo, A è l'ampiezza, φ lo shift di fase, d il ritardo temporale, s il fattore di scala e ν l'offset di frequenza. Nella (5.1) $s = c/(c + v)$ e $\nu = -f_c v/(c + v) + \nu_{\text{osc}}$, dove c è la velocità di propagazione nel mezzo, v la velocità radiale, f_c la frequenza portante del segnale reale trasmesso, e ν_{osc} il disadattamento in frequenza fra gli oscillatori in trasmissione ed in ricezione. Inoltre $\varphi = \varphi_{\text{ch}} + \varphi_{\text{osc}}$ con φ_{ch} uguale allo shift di fase introdotto dal canale e φ_{osc} uguale al disadattamento in fase fra l'oscillatore in ricezione ed in trasmissione.

Il fattore di scala s può essere considerato unitario se la condizione

$$BT \ll c/v \quad (5.2)$$

è soddisfatta, dove B è la banda di $x(t)$ e T è la lunghezza dell'intervallo di osservazione [38, pp. 240-242]. Se vale l'ipotesi precedente, il canale fra trasmettitore e ricevitore può essere modellato come periodicamente tempo variante.

Ci sono delle situazioni pratiche in cui il prodotto BT non soddisfa la condizione (5.2) e, quindi, il fattore di scala non può essere considerato unitario; ad esempio, si consideri il segnale trasmesso in un sistema ad accesso multiplo a divisione di codice (CDMA), con periodo di chip T_c , numero di chip per bit N_c , periodo di bit $T_b = N_c T_c$, e T_c pari alla durata dell'impulso chip rettangolare. Assumendo $B \simeq 1/T_c$, risulta che la condizione (5.2) diventa

$$BT \simeq N_b N_c \ll c/v + 1 \quad (5.3)$$

dove $N_b = T/T_b = T/(N_c T_c)$ è il numero di bit processati nell'intervallo di lunghezza T . Quindi, se $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, $v=100 \text{ km h}^{-1}$, e $N_c = 512$, allora la (5.3) porta a $N_b \ll 2 \cdot 10^4$. Vale a dire che, qualora il massimo numero di bit processati superi poche centinaia, deve essere preso in considerazione un fattore di scala non unitario. Molti altri esempi in cui la (5.2) non è soddisfatta si hanno nei sistemi di comunicazione ultra wide-band. In [34] l'adozione del modello a banda larga è reso necessario dal valore della risoluzione temporale che, essendo inversamente proporzionale alla banda, è molto piccola per i segnali ultra wide-band, rendendo difficile la possibilità di trascurare il fattore di scala s .

Il modello di segnale (5.1) è stato adottato nelle applicazioni radar/sonar dove $x(t) \in L^2([0, T])$, con $[0, T]$ l'intervallo di osservazione. In questi casi i parametri del segnale sono stimati ricorrendo alla funzione di ambiguità a banda larga (*wide-band ambiguity*) [21]. Nelle comunicazioni, per problemi di stima e sincronizzazione, i segnali trasmessi e ricevuti sono modellati come ciclostazionari e, quindi, con segnali di energia infinita. In tal caso il metodo basato sulla funzione di ambiguità ad ampia banda non può essere utilizzato.

Il metodo di stima proposto si basa sul calcolo delle statistiche cicliche del secondo ordine del segnale ricevuto $r(t)$.

Nell'ipotesi che sia $x(t)$ che $n(t)$ nella (5.1) siano a media nulla e statisticamente indipendenti, lo spettro ciclico e lo spettro ciclico coniugato

del segnale ricevuto $r(t)$ sono dati da

$$S_{rr^*}^\alpha(f) = \frac{A^2}{|s|} e^{-j2\pi\alpha d/s} S_{xx^*}^{\alpha/s}\left(\frac{f-\nu}{s}\right) + S_{nn^*}^\alpha(f) \quad (5.4)$$

$$S_{rr}^\beta(f) = \frac{A^2}{|s|} e^{j2\varphi} e^{-j2\pi(\beta-2\nu)d/s} S_{xx}^{(\beta-2\nu)/s}\left(\frac{f-\nu}{s}\right) + S_{nn}^\beta(f) \quad (5.5)$$

rispettivamente, dove $S_{xx^*}^\alpha(f)$ e $S_{xx}^\beta(f)$ sono lo spettro ciclico e lo spettro ciclico coniugato di $x(t)$ e $S_{nn^*}^\alpha(f)$ e $S_{nn}^\beta(f)$ quelli di $n(t)$.

Siano α_0 e β_0 , rispettivamente, una frequenza di ciclo e una frequenza di ciclo coniugata di $x(t)$. Inoltre, si assuma che i valori del fattore di scala s e dell'offset di frequenza ν siano tali che, per qualche $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, c'è solo una frequenza di ciclo di $y(t)$ nell'insieme $J(\alpha_0, \Delta\alpha) \triangleq [\alpha_0 - \Delta\alpha/2, \alpha_0 + \Delta\alpha/2]$ e solo una frequenza di ciclo coniugata di $y(t)$ nell'insieme $J(\beta_0, \Delta\beta)$, e, inoltre, $S_{nn^*}^\alpha(f) = 0$ per $\alpha \in J(\alpha_0, \Delta\alpha)$ e $S_{nn}^\beta(f) = 0$ per $\beta \in J(\beta_0, \Delta\beta)$. In tal caso, le stime di s e ν possono essere ottenute da

$$\hat{s} = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha_0} \quad \hat{\nu} = \frac{1}{2}(\hat{\beta} - \hat{s}\beta_0) \quad (5.6)$$

dove

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha \in J(\alpha_0, \Delta\alpha)} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{S}_{rr^*}^\alpha(f) \right|^2 df \quad (5.7)$$

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta \in J(\beta_0, \Delta\beta)} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{S}_{rr}^\beta(f) \right|^2 df \quad (5.8)$$

con $\hat{S}_{rr^*}^\alpha(f)$ e $\hat{S}_{rr}^\beta(f)$ che sono, rispettivamente, le stime dello spettro ciclico e dello spettro ciclico coniugato del segnale $r(t)$. L'assunzione precedente può essere facilmente verificata nell'ipotesi che $|\alpha_0 - \alpha_I| > \Delta\alpha/2$ e $s\alpha_0 \in J(\alpha_0, \Delta\alpha)$ dove α_I è la frequenza di ciclo di $n(t)$ più vicina ad α_0 e, inoltre, $|\beta_0 - \beta_I| > \Delta\beta/2$ e $s\beta_0 + 2\nu \in J(\beta_0, \Delta\beta)$ dove β_I è la frequenza di ciclo coniugata di $n(t)$ più vicina a β_0 .

La stima dei rimanenti parametri A , φ e d si ottiene risolvendo due problemi di minimizzazione dell'errore quadratico medio.

Capitolo 5. Algoritmo di sincronizzazione per segnali wide-band

Dall'equazione (5.4) segue che le stime di ampiezza e ritardo possono essere ottenute minimizzando rispetto a γ la funzione

$$g(\gamma, \gamma^*) \triangleq \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{S}_{rr^*}^{\alpha_0}(f) - \gamma S_{xx^*}^{\alpha_0} \left(\frac{f - \widehat{\nu}}{\widehat{s}} \right) \right|^2 df. \quad (5.9)$$

Nel caso ideale di misura perfetta, in accordo con la (5.4) con $S_{nn^*}^{\alpha}(f) \equiv 0$, la soluzione del problema di minimizzazione è

$$\gamma^{(\text{opt})} = \frac{A^2}{|s|} e^{-j2\pi\alpha_0 d} \quad (5.10)$$

dalla quale segue che $g(\gamma^{(\text{opt})}, \gamma^{(\text{opt})*}) = 0$. Nel caso di intervallo di osservazione finito, la funzione $g(\gamma, \gamma^*)$ può essere minimizzata risolvendo l'equazione

$$\left. \frac{\partial}{\partial \gamma} g(\gamma, \gamma^*) \right|_{\gamma=\gamma^{(\text{opt})}} = 0 \quad (5.11)$$

con γ and γ^* considerati come variabili indipendenti [2]. Questo porta a

$$\begin{aligned} \gamma^{(\text{opt})} &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{S}_{rr^*}^{\alpha_0}(f) S_{xx^*}^{\alpha_0} \left(\frac{f - \widehat{\nu}}{\widehat{s}} \right)^* df \\ &\cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \left| S_{xx^*}^{\alpha_0} \left(\frac{f - \widehat{\nu}}{\widehat{s}} \right) \right|^2 df \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Di conseguenza, in accordo alla (5.10), le stime di ampiezza e ritardo sono

$$\widehat{A} = \left| \gamma^{(\text{opt})} \widehat{s} \right|^{1/2} \quad (5.13)$$

$$\widehat{d} = -\frac{1}{2\pi\alpha_0} \angle \left[\gamma^{(\text{opt})} \right]. \quad (5.14)$$

Dall'equazione (5.5) segue che la stima della fase può essere ottenuta minimizzando rispetto a $\bar{\gamma}$ la funzione

$$h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*) \triangleq \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{S}_{rr^*}^{\beta_0+2\widehat{\nu}}(f) - \bar{\gamma} S_{xx}^{\beta_0} \left(\frac{f - \widehat{\nu}}{\widehat{s}} \right) \right|^2 df. \quad (5.15)$$

Nel caso ideale di misura perfetta in accordo con la (5.5) con $S_{nn}^{\beta}(f) \equiv 0$, la soluzione del problema di minimizzazione è

$$\bar{\gamma}^{(\text{opt})} = \frac{A^2}{|s|} e^{j2\varphi} e^{-j2\pi\beta_0 d} \quad (5.16)$$

dalla quale segue che $h(\bar{\gamma}^{(\text{opt})}, \bar{\gamma}^{(\text{opt})*}) = 0$. Nel caso reale di intervallo di osservazione finito la funzione $h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*)$ può essere minimizzata risolvendo l'equazione

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*) \right|_{\bar{\gamma}=\bar{\gamma}^{(\text{opt})}} = 0 \quad (5.17)$$

che porta a

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{(\text{opt})} = & \int_{\mathbb{R}} \widehat{S}_{rr}^{\widehat{s}\beta_0+2\widehat{\nu}}(f) S_{xx}^{\beta_0} \left(\frac{f-\widehat{\nu}}{\widehat{s}} \right)^* df \\ & \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \left| S_{xx}^{\beta_0} \left(\frac{f-\widehat{\nu}}{\widehat{s}} \right) \right|^2 df \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pertanto, in accordo con la (5.10) e la (5.16), la stima della fase è

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{2} \angle \left[\frac{\bar{\gamma}^{(\text{opt})}}{\bar{\gamma}^{(\text{opt})}} e^{-j2\pi(\alpha_0-\beta_0)\widehat{d}} \right]. \quad (5.19)$$

5.3 Risultati delle simulazioni

Simulazioni Monte Carlo sono state effettuate per mostrare l'efficacia dello stimatore proposto. Nell'esperimento $x(t)$ è un segnale PAM con impulso di Nyquist con eccesso di banda uguale a 0.85 e periodo di bit pari a $T_b = 9T_s$, con T_s periodo di campionamento. Il rumore $n(t)$ è gaussiano bianco circolare stazionario e il rapporto segnale-rumore nella banda $(-1/2T_s, 1/2T_s)$ è 10 dB. I parametri del segnale ricevuto sono: $s = 1.0013$, $\nu = 0.00047/T_s$, $A = 1$, $\varphi = 0.78$ e $d = 2.7T_s$. La frequenza di ciclo e la frequenza di ciclo coniugata di $x(t)$ sono $\alpha_0 = \beta_0 = 1/T_b$. Gli spettri ciclici (coniugati) sono stimati usando lo *smoothing* in frequenza per il periodogramma ciclico (coniugato) [9], con una finestra rettangolare di *smoothing* di durata $\Delta f = 0.027/T_s$, in funzione di un numero di bit N_b che va da 2^6 a 2^{11} . Le prestazioni dell'algoritmo sono determinate in funzione dell'errore efficace, valutato su 400 prove, per il fattore di scala, lo shift di frequenza, l'ampiezza, il ritardo e lo shift di fase normalizzati rispettivamente a $|s|$, $1/T_b$, A , T_b e 2π (Fig. 5.1). I risultati mostrano che l'algoritmo proposto ha prestazioni migliori di quello che stima i rimanenti parametri trascurando il fattore di scala (cioè, che assume $s = 1$ in (5.1)) che adotta, cioè un modello a banda stretta. Inoltre, per un intervallo di osservazione sufficientemente lungo,

le prestazioni dello stimatore proposto sono prossime a quelle dell'algoritmo che ha una perfetta conoscenza dello shift in frequenza e del fattore di scala.

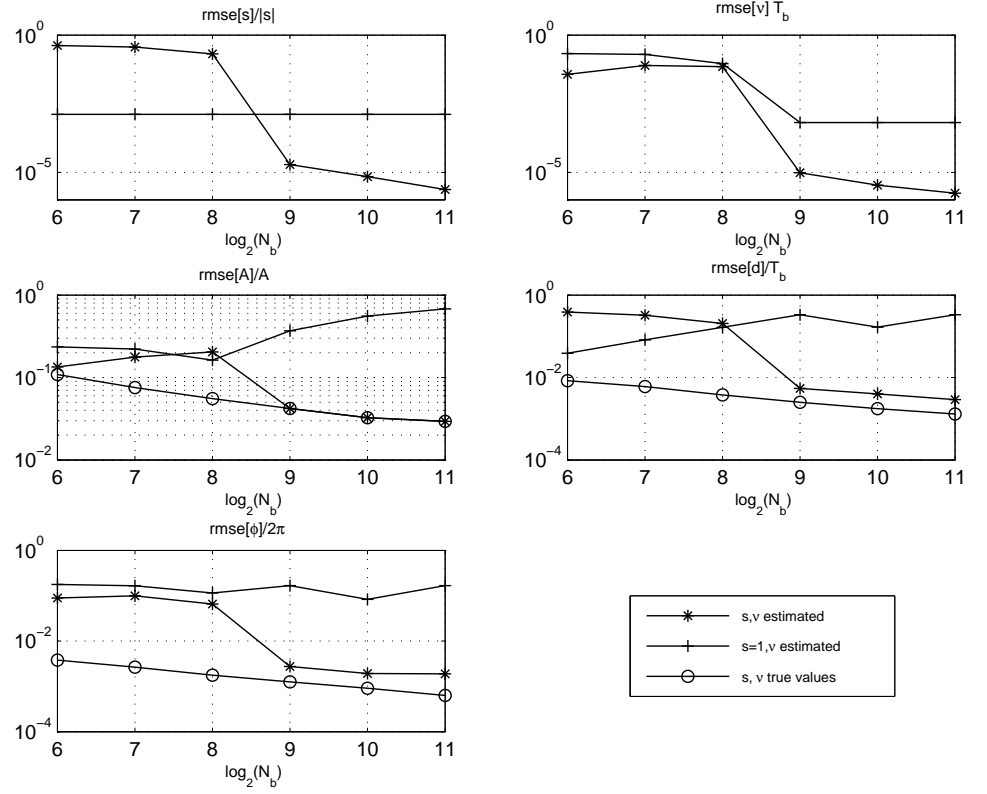


Figura 5.1: RMSE per la stima del fattore di scala s , dello shift in frequenza ν , dell'ampiezza A , del ritardo d e dello shift di fase φ , normalizzati a $|s|$, $1/T_b$, A , T_b e 2π , rispettivamente, in funzione del numero di bit N_b .

Capitolo 6

Algoritmo di sincronizzazione per segnali wide-band circolari

Molti segnali di comunicazione, come i segnali M-ari QAM con $M \geq 4$, sono segnali circolari, hanno cioè la funzione di autocorrelazione coniugata identicamente nulla. Gli algoritmi di stima blind, presentati nei capitoli precedenti, sia nel caso di modello a banda larga che nel caso in cui sia lecito assumere un valore unitario per il fattore di scala, non possono essere utilizzati nell'ipotesi di segnale circolare in quanto realizzano la stima del Doppler shift ricercando le frequenze di ciclo coniugate del segnale ricevuto. In questo capitolo sarà presentato un algoritmo che stima gli shift in frequenza ricercando le frequenze di ciclo del quarto ordine del segnale ricevuto, cioè le frequenze dell'espansione in serie di Fourier del cumulante del quarto ordine del segnale ricevuto; il fattore di scala viene stimato ricercando le frequenze di ciclo del secondo ordine del segnale ricevuto. Il massimo errore accettabile per la stima di una frequenza di ciclo da inserire poi in uno stimatore di una statistica ciclica deve essere più piccolo della risoluzione della frequenza di ciclo della stima della statistica ciclica (che è dell'ordine del reciproco della lunghezza dell'intervallo di osservazione). È necessario, quindi, che le stime del fattore di scala e del Doppler shift siano molto accurate. Una volta che il fattore di scala ed il Doppler shift sono stati stimati, per stimare l'ampiezza, il ritardo e la fase, si minimizzano due errori quadratici medi: il primo è fra la funzione cumulante temporale ciclica

a dimensione ridotta stimata e quella vera; il secondo è fra la funzione di autocorrelazione ciclica stimata e quella vera. La complessità computazionale connessa al calcolo dell'intera statistica ciclica del quarto ordine è molto elevata a causa della durata dell'intervallo di osservazione necessaria per assicurare buone prestazioni. È stata, quindi, introdotta una versione dell'algoritmo di stima a complessità ridotta, la cui complessità computazionale è paragonabile a quella degli algoritmi basati sulle statistiche del secondo ordine.

6.1 Algoritmo di stima

Si consideri per il segnale ricevuto l'espressione introdotta nel Capitolo 5, nelle ipotesi di modello a banda larga. Se il segnale $x(t)$ trasmesso è statisticamente indipendente dal rumore $n(t)$, per la proprietà di additività dei cumulanti di segnali statisticamente indipendenti [13], si ha che la funzione cumulante temporale a dimensione ridotta di ordine N del segnale ricevuto $r(t)$ è

$$C_{\mathbf{r}}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}') = A^N e^{-j2\pi(\alpha - \nu \mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1})d/s} C_{\mathbf{x}}^{(\alpha - \nu \mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1})/s}(s\boldsymbol{\tau}') \\ e^{j2\pi\nu \mathbf{1}^{(-)T} \boldsymbol{\tau}'} e^{j\mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1}\varphi} + C_n^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}') \quad (6.1)$$

con $\boldsymbol{\tau}' \triangleq [\tau_1, \dots, \tau_{N-1}]^T$, $\mathbf{r} \triangleq [r^{(*)}_1, \dots, r^{(*)}_N]^T$, $(*)_k$ che rappresenta la k -esima coniugazione complessa opzionale, $\mathbf{1}^{(-)} \triangleq [(-)_1, \dots, (-)_N]^T$, con $(-)_k$ che rappresenta un segno meno opzionale da considerarsi quando la coniugazione opzionale $(*)_k$ è presente. Nell'ipotesi in cui il segnale di disturbo non è ciclostazionario di ordine N alla frequenza di ciclo α per la considerata configurazione di coniugazioni, cioè se si ha

$$C_n^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}') \equiv 0 \quad (6.2)$$

l'equazione (6.1) fornisce una relazione utile per ricavare un algoritmo fortemente immune al rumore ed alle interferenze, indipendentemente dall'estensione della sovrapposizione temporale e spettrale dei segnali $x(t)$ e $n(t)$, senza assumere alcuna conoscenza della funzione di densità di probabilità del primo ordine e della funzione di densità spettrale del termine di disturbo $n(t)$.

Per $N = 2$, nell'ipotesi di segnali a media nulla, scegliendo la configurazione di coniugazioni $[rr^*]$ nella (6.1), si ha $\mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1} = 0$ e si ottiene la funzione di autocorrelazione ciclica del segnale $r(t)$

$$R_{rr^*}^\alpha(\tau_1) = A^2 e^{j2\pi\nu\tau_1} e^{-j2\pi\alpha d/s} R_{xx^*}^{\alpha/s}(s\tau_1) + R_{nn^*}^\alpha(\tau_1). \quad (6.3)$$

Scegliendo la configurazione di coniugazione $[rr]$ nella (6.1) si ottiene la funzione di autocorrelazione ciclica coniugata che è identicamente nulla per segnali circolari.

Per $N = 4$, scegliendo la configurazione di coniugazioni $[rrrr]$, si ha $\mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1} = 4$ e la (6.1) diventa

$$\begin{aligned} C_{rrrr}^\alpha(\boldsymbol{\tau}') &= A^4 e^{-j2\pi(\alpha-4\nu)d/s} C_{xxxx}^{(\alpha-4\nu)/s}(s\boldsymbol{\tau}') \\ &\quad \cdot e^{j2\pi\nu(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} e^{j4\varphi} + C_{nnnn}^\alpha(\boldsymbol{\tau}'). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Siano α_0 e β_0 rispettivamente una frequenza di ciclo del secondo ordine e una frequenza di ciclo del quarto ordine relativa alla configurazione di coniugazione $[xxxx]$ di $x(t)$. Inoltre, si assuma che i valori del fattore di scala s e dell'offset di frequenza ν siano tali che, per qualche $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, ci sia solo una frequenza di ciclo del secondo ordine di $r(t)$ nell'insieme $J(\alpha_0, \Delta\alpha) \triangleq [\alpha_0 - \Delta\alpha/2, \alpha_0 + \Delta\alpha/2]$ e solo una frequenza di ciclo del quarto ordine relativa alla configurazione di coniugazione $[rrrr]$ di $r(t)$ nell'insieme $J(\beta_0, \Delta\beta)$, e, inoltre, $R_{nn^*}^\alpha(\tau) = 0$ per $\alpha \in J(\alpha_0, \Delta\alpha)$ e $C_{nnnn}^\beta(\boldsymbol{\tau}') = 0$ per $\beta \in J(\beta_0, \Delta\beta)$. In tal caso, le stime di s e ν possono essere ottenute da

$$\hat{s} = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha_0} \quad \hat{\nu} = \frac{1}{4}(\hat{\beta} - \hat{s}\beta_0) \quad (6.5)$$

dove

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha \in J(\alpha_0, \Delta\alpha)} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{R}_{rr^*}^\alpha(\tau) \right|^2 d\tau \quad (6.6)$$

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta \in J(\beta_0, \Delta\beta)} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \hat{C}_{yyyy}^\beta(\boldsymbol{\tau}') \right|^2 d\boldsymbol{\tau}' \quad (6.7)$$

con $\hat{R}_{rr^*}^\alpha(\tau)$ e $\hat{C}_{rrrr}^\beta(\boldsymbol{\tau}')$ stime dell'autocorrelazione ciclica e del cumulante ciclico del quarto ordine a dimensione ridotta relativo alla configurazione di coniugazione $[rrrr]$ del segnale $r(t)$.

L'assunzione precedente può essere facilmente verificata nell'ipotesi che $|\alpha_0 - \alpha_I| > \Delta\alpha/2$ e $s\alpha_0 \in J(\alpha_0, \Delta\alpha)$ dove α_I è la frequenza di ciclo di $n(t)$ più vicina ad α_0 e, inoltre, $|\beta_0 - \beta_I| > \Delta\beta/2$ e $s\beta_0 + 4\nu \in J(\beta_0, \Delta\beta)$ dove β_I è la frequenza di ciclo del quarto ordine relativa alla configurazione di coniugazione $[nnnn]$ di $n(t)$ più vicina a β_0 .

La stima dei rimanenti parametri A , φ e d si ottiene risolvendo due problemi di minimizzazione dell'errore quadratico medio.

Dall'equazione (6.3) segue che le stime di ampiezza e ritardo possono essere ottenute minimizzando rispetto a γ la funzione

$$g(\gamma, \gamma^*) \triangleq \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{R}_{rr^*}^{s\alpha_0}(\tau) - \gamma R_{xx^*}^{\alpha_0}(\widehat{s}\tau) e^{j2\pi\widehat{\nu}\tau} \right|^2 d\tau. \quad (6.8)$$

Nel caso ideale di misura perfetta, in accordo con la (6.3) con $R_{nn^*}^{\alpha}(\tau) \equiv 0$, la soluzione del problema di minimizzazione è

$$\gamma^{(\text{opt})} = A^2 e^{-j2\pi\alpha_0 d} \quad (6.9)$$

dalla quale segue che $g(\gamma^{(\text{opt})}, \gamma^{(\text{opt})*}) = 0$. Nel caso di intervallo di osservazione finito, la funzione $g(\gamma, \gamma^*)$ può essere minimizzata risolvendo l'equazione

$$\left. \frac{\partial}{\partial \gamma} g(\gamma, \gamma^*) \right|_{\gamma=\gamma^{(\text{opt})}} = 0 \quad (6.10)$$

con γ and γ^* considerati come variabili indipendenti [2]. Questo porta a

$$\begin{aligned} \gamma^{(\text{opt})} &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{R}_{rr^*}^{s\alpha_0}(\tau) R_{xx^*}^{\alpha_0}(\widehat{s}\tau)^* e^{-j2\pi\widehat{\nu}\tau} d\tau \\ &\cdot \left[\int_{\mathbb{R}} |R_{xx^*}^{\alpha_0}(\widehat{s}\tau)|^2 d\tau \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Di conseguenza, in accordo con la (6.9), le stime di ampiezza e ritardo sono

$$\widehat{A} = \left| \gamma^{(\text{opt})} \right|^{1/2} \quad (6.12)$$

$$\widehat{d} = -\frac{1}{2\pi\alpha_0} \angle \left[\gamma^{(\text{opt})} \right]. \quad (6.13)$$

Dall'equazione (6.4) segue che la stima della fase può essere ottenuta minimizzando rispetto a $\bar{\gamma}$ la funzione

$$h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*) \triangleq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \widehat{C}_{rrrr}^{\widehat{s}\beta_0+4\widehat{\nu}}(\boldsymbol{\tau}') - \bar{\gamma} C_{xxxx}^{\beta_0}(\widehat{s}\boldsymbol{\tau}') e^{j2\pi\widehat{\nu}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} \right|^2 d\boldsymbol{\tau}'. \quad (6.14)$$

Nel caso ideale di misura perfetta, in accordo con la (6.4) con $C_{nnnn}^\beta(\boldsymbol{\tau}') \equiv 0$, la soluzione del problema di minimizzazione è

$$\bar{\gamma}^{(\text{opt})} = A^4 e^{j4\varphi} e^{-j2\pi\beta_0 d} \quad (6.15)$$

dalla quale segue che $h(\bar{\gamma}^{(\text{opt})}, \bar{\gamma}^{(\text{opt})*}) = 0$. Nel caso reale di intervallo di osservazione finito la funzione $h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*)$ può essere minimizzata risolvendo l'equazione

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} h(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^*) \right|_{\bar{\gamma}=\bar{\gamma}^{(\text{opt})}} = 0 \quad (6.16)$$

che porta a

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{(\text{opt})} &= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{C}_{rrrr}^{\widehat{s}\beta_0+2\widehat{\nu}}(\boldsymbol{\tau}') C_{xxxx}^{\beta_0}(\widehat{s}\boldsymbol{\tau}')^* e^{-j2\pi\widehat{\nu}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} d\boldsymbol{\tau}' \\ &\cdot \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left| C_{xxxx}^{\beta_0}(\widehat{s}\boldsymbol{\tau}') \right|^2 d\boldsymbol{\tau}' \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Infine, in accordo con la (6.9) e la (6.15), la stima della fase è

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{4} \angle \left[\frac{\bar{\gamma}^{(\text{opt})}}{\bar{\gamma}^{(\text{opt})}} e^{-j2\pi(\alpha_0-\beta_0)d} \widehat{d} \right]. \quad (6.18)$$

6.2 Realizzazione del metodo proposto

Nel paragrafo precedente, per la statistica del quarto ordine, la configurazione di coniugazioni adottata è stata la $[rrrr]$. Tale scelta non è l'unica possibile che consente la stima della fase, infatti, scegliendo la configurazione di coniugazioni $[rrrr^*]$, si ha $\mathbf{1}^{(-)T} \mathbf{1} = 2$ nella (6.1) e quindi

$$\begin{aligned} C_{rrrr^*}^\alpha(\boldsymbol{\tau}') &= A^4 e^{-j2\pi(\alpha-2\nu)d/s} C_{xxxx^*}^{(\alpha-2\nu)/s}(s\boldsymbol{\tau}') \\ &\cdot e^{j2\pi\nu(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} e^{j2\varphi} + C_{nnnn^*}^\alpha(\boldsymbol{\tau}'). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Scegliendo la configurazione $[rrr^*r^*]$ si ha $\mathbf{1}^{(-)T}\mathbf{1} = 0$ e la (6.1) diventa

$$C_{rrr^*r^*}^\alpha(\boldsymbol{\tau}') = A^4 e^{-j2\pi\alpha d/s} C_{xxx^*x^*}^{\alpha/s}(s\boldsymbol{\tau}') \cdot e^{j2\pi\nu(\tau_1+\tau_2-\tau_3)} + C_{nnn^*n^*}^\alpha(\boldsymbol{\tau}'). \quad (6.20)$$

Per la scelta della configurazione da adottare sono state prese in considerazione due esigenze: la necessità di scegliere il grado più alto di ciclostazionarietà del quarto ordine e la più bassa ambiguità nella fase. Un problema di minimizzazione basato sulla (6.19) porta alla condizione sulla fase $|\varphi| \leq \pi/2$, mentre, considerando la (6.4), si ha la condizione più restrittiva $|\varphi| \leq \pi/4$. Si è preferito adottare la configurazione di coniugazione $[rrrr]$ perchè a tale configurazione è associata una ciclostazionarietà del quarto ordine più elevata di quella ottenuta considerando $[rrrr^*]$ per il segnale utente considerato. La configurazione $[rrr^*r^*]$ non può essere utilizzata poichè non consente la stima della fase.

Per la stima delle statistiche cicliche ridotte del quarto ordine è necessario conoscere l'intero β -submanifold del segnale $r(t)$. Infatti, anche se il segnale di disturbo $n(t)$ non presenta ciclostazionarietà del quarto ordine alla considerata frequenza di ciclo, il β -submanifold del segnale $r(t)$ dipende dalle frequenze di ciclo di ordine più basso, sia del segnale utile $x(t)$ che del segnale di disturbo. In generale, una caratterizzazione spettrale del segnale di disturbo che includa tutte le frequenze di ciclo di ordine più basso potrebbe non essere disponibile. Una possibile soluzione consiste nell'adottare il metodo proposto in [24] per stimare il polispettro ciclico e poi antitrasformare secondo Fourier per ottenere il RD-CTCF. Nel caso particolare in cui N è il più basso grado di ciclostazionarietà del segnale utile (per la considerata configurazione di coniugazioni adottata per il lag-product di ordine N) e, inoltre, il segnale di disturbo ha frequenze di ciclo incommensurabili con, o non troppo vicine a, quelle del segnale utile, allora, per frequenze di ciclo $\beta \neq 0$, il RD-CTCF del segnale $r(t)$ è coincidente con la funzione momento temporale ciclico a dimensione ridotta (RD-CTMF). Infatti, per $N = 4$ e $\tau_4 = 0$ si ha che, considerando l'espressione che esprime la funzione cumulante temporale ciclico di ordine N in termini delle funzioni momenti temporali ciclici di ordine N [13] e più basso, il RD-CTCF di un segnale $r(t)$ a media nulla alla frequenza di ciclo β con configurazione di coniugazioni $[rrrr]$ è dato

da

$$C_{rrrr}^\beta(\tau') = R_{rrrr}^\beta(\tau') - \sum_{(\mu_1, \mu_2 \in P_2)} \left[\sum_{\alpha_{\mu_1} + \alpha_{\mu_2} = \beta} \mathcal{R}_{rr}^{\alpha_{\mu_1}}(\tau_{\mu_1}) \mathcal{R}_{rr}^{\alpha_{\mu_2}}(\tau_{\mu_2}) \right]_{\tau_4=0} \quad (6.21)$$

Nella (6.21) $R_{rrrr}^\beta(\tau')$ è il RD-CTMF del quarto ordine di $r(t)$ la somma interna è su tutte le coppie delle frequenze di ciclo coniugate del secondo ordine del segnale $r(t)$ tali che $\alpha_{\mu_1} + \alpha_{\mu_2} = \beta$ e la somma esterna è su tutte le partizioni $\{\mu_1, \mu_2\}$ dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ tali che ogni sottoinsieme μ_i è costituito da due elementi: infatti, non sono state considerate partizioni costituite da un solo elemento per l'ipotesi fatta di media nulla del segnale $r(t)$. Inoltre, nella (6.21) τ_{μ_i} è il vettore i cui elementi hanno per indice gli elementi dell'insieme μ_i e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{rr}^{\alpha_{\mu_i}}(\tau_{\mu_i}) &\triangleq \left\langle \prod_{k \in \mu_i} r(t + \tau_k) e^{-j2\pi\alpha_{\mu_i}t} \right\rangle \\ &= \mathcal{R}_{xx}^{\alpha_{\mu_i}}(\tau_{\mu_i}) + \mathcal{R}_{nn}^{\alpha_{\mu_i}}(\tau_{\mu_i}). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Se il segnale $x(t)$ è circolare (si ha quindi $R_{xx}^{\alpha_{\mu_i}}(\tau_{\mu_i}) \equiv 0$) e il segnale di disturbo $n(t)$ (non necessariamente circolare) è tale che per ogni coppia $(\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2})$ delle frequenze di ciclo coniugate del secondo ordine non risulti mai che $\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2} = \beta$ per qualche $\beta \in I(\beta_0, \Delta\beta_0)$, allora nella (6.21) si ha che $\mathcal{R}_{rr}^{\alpha_{\mu_1}}(\tau_{\mu_1}) \mathcal{R}_{rr}^{\alpha_{\mu_2}}(\tau_{\mu_2}) \equiv 0 \quad \forall (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2})$ tale che $\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2} = \beta \in I(\beta_0, \Delta\beta_0)$ e quindi

$$C_{rrrr}^\beta(\tau') = R_{rrrr}^\beta(\tau') \quad \forall \beta \in I(\beta_0, \Delta\beta_0). \quad (6.23)$$

Di conseguenza, la stima del RD-CTCF del quarto ordine si riduce a quella del RD-CTMF del quarto ordine che può essere realizzata con il correlogramma ciclico del quarto ordine

$$\hat{R}_{rrrr}^\beta(\tau') \triangleq \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} r(u) \prod_{k=1}^3 r(u + \tau_k) \text{rect}\left(\frac{u}{T}\right) e^{-j2\pi\beta u} du \quad (6.24)$$

che è molto più semplice e non richiede la conoscenza del β -submanifold del segnale ricevuto. Nella (6.24) $\text{rect}(t) = 1$ per $|t| \leq 1/2$ e 0 altrove. La

condizione sulle frequenze di ciclo del segnale di disturbo non presenta particolari problemi. Infatti, considerando che le frequenze di ciclo sono ottenute come combinazioni lineari di parametri come la frequenza della portante o la frequenza di simbolo, è sufficiente che tali parametri siano incommensurabili o non troppo vicini a quelli del segnale utile, dove le distanze è necessario che siano più grandi di $\Delta\beta_0$.

6.3 Algoritmo a complessità ridotta

La valutazione dell'intera statistica ciclica del quarto ordine del segnale ricevuto rappresenta un problema ad elevata complessità computazionale, poichè per ottenere stime con bias e varianza sufficientemente piccole sono necessari intervalli temporali di durata elevata. Per ridurre la complessità computazionale, la stima del Doppler shift basato sulla (6.4) e della fase basato sul problema di minimizzazione (6.15) sono realizzate con riferimento non all'intera statistica ciclica del quarto, ma considerando una *slice* per $\tau_2 = \tau_{2,0}$ e $\tau_3 = \tau_{3,0}$ in maniera tale da massimizzare rispetto a τ_2 e τ_3 la funzione di costo

$$F^{\beta_0}(\tau_{2,0}, \tau_{3,0}) \triangleq \int_{\mathbb{R}} \left| C_{xxx}^{\beta_0}(\tau_1, \tau_{2,0}, \tau_{3,0}) \right|^2 d\tau_1 \quad (6.25)$$

che è una misura del grado di ciclostazionarietà del quarto ordine del segnale lungo una *slice* del RD-CTCF alla frequenza di ciclo β_0 con τ_2 e τ_3 fissati. Tale massimizzazione è indipendente dal segnale ricevuto $r(t)$ e può essere effettuata una volta per tutte. Una volta che i valori ottimi per $\tau_{2,0}$ e $\tau_{3,0}$ sono stati determinati, la stima del Doppler shift viene effettuato considerando la funzione $C_{rrrr}^{\beta}(\tau_1, \tau_{2,0}, \tau_{3,0})$. In tal caso, la stima del RD-CTCF del segnale ricevuto si riduce alla stima della mutua correlazione ciclica coniugata fra il segnale $r(t)$ e $r_3(t) = r(t + \tau_{2,0})r(t + \tau_{3,0})r(t)$ e, quindi, la complessità computazionale è riconducibile a quella degli algoritmi basati sulle statistiche cicliche del secondo ordine.

6.4 Simulazioni numeriche

Sono state effettuate delle simulazioni Monte Carlo per mostrare l'efficacia dello stimatore proposto. Nell'esperimento $x(t)$ è un segnale PAM complesso con impulso di Nyquist con eccesso di banda uguale a 0.9 e periodo di bit $T_b = 4T_s$, con T_s periodo di campionamento. Il rumore

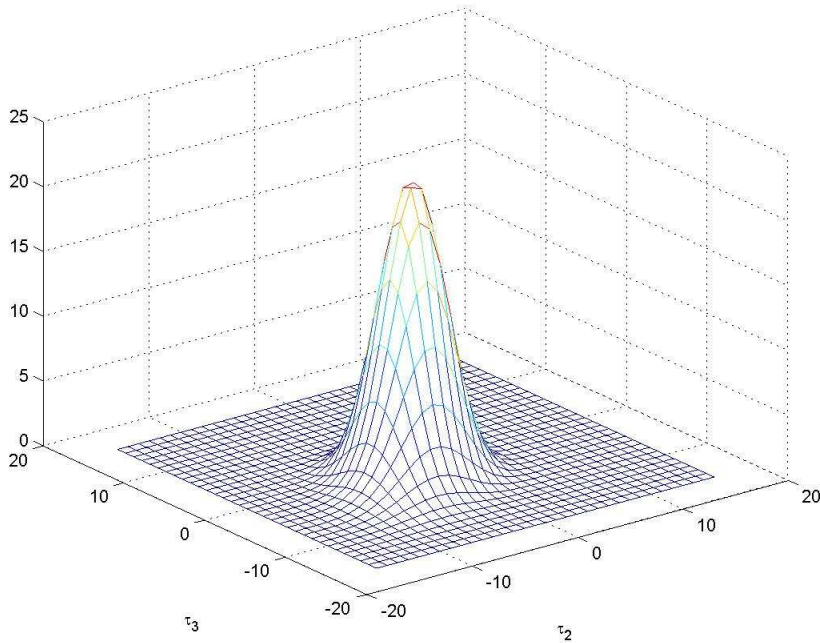


Figura 6.1: Funzione di costo

$n(t)$ è gaussiano bianco circolare stazionario e il rapporto segnale-rumore nella banda $(-1/2T_s, 1/2T_s)$ è 10 dB. I parametri del segnale ricevuto sono: $s = 1.001$, $\nu = 0.0047/T_s$, $A = 1$, $\varphi = 0.4$ e $d = 1.8T_s$. La frequenza di ciclo e la frequenza di ciclo coniugata di $x(t)$ sono $\alpha_0 = \beta_0 = 1/T_b$. La Fig. 6.1 mostra che la slice ottima è quella con $\tau_{2,0} = \tau_{3,0} = 0$. Le prestazioni dell'algoritmo sono determinate in funzione dell'errore efficace, valutato su 500 prove, per il fattore di scala, lo shift di frequenza, l'ampiezza, il ritardo e lo shift di fase normalizzati a $|s|$, $1/T_b$, A , T_b e 2π , rispettivamente (Fig. 6.2). I risultati mostrano che l'algoritmo proposto supera largamente quello che stima i rimanenti parametri trascurando il fattore di scala cioè se adotta un modello a banda stretta. Inoltre, per un intervallo di osservazione sufficientemente lungo, le prestazioni dello stimatore proposto sono prossime a quelle dell'algoritmo che ha una perfetta conoscenza dello shift in frequenza e del fattore di scala.

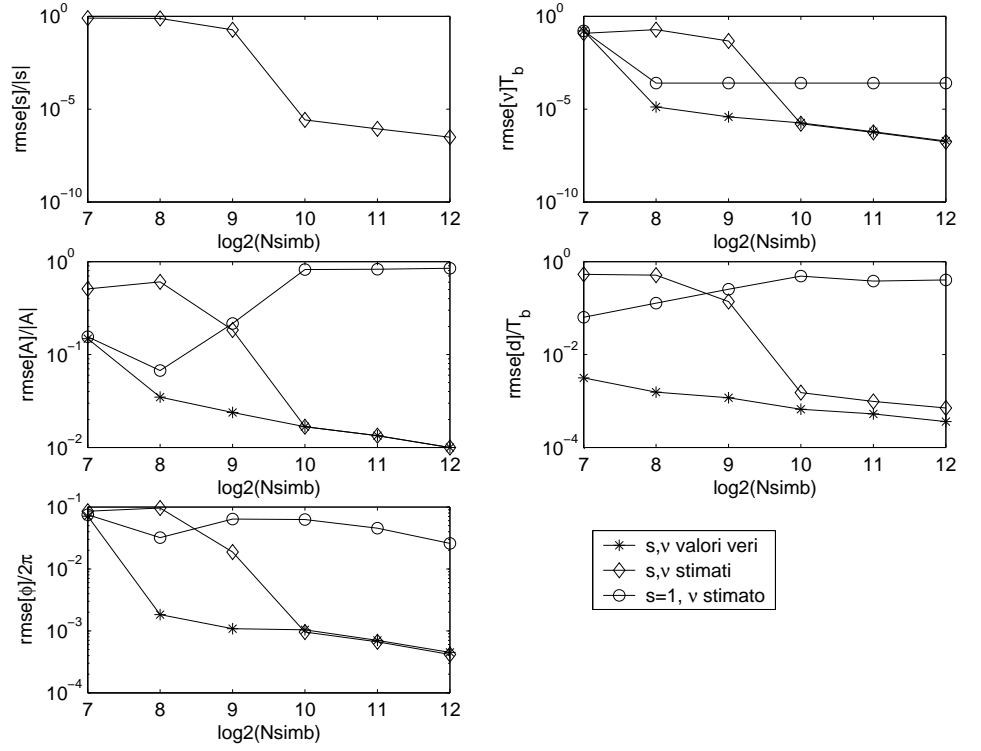


Figura 6.2: RMSE per la stima del fattore di scala s , dello shift in frequenza ν , dell'ampiezza A , del ritardo d e dello shift di fase φ , normalizzati a $|s|$, $1/T_b$, A , T_b e 2π , rispettivamente, in funzione del numero di bit N_b .

Capitolo 7

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro di tesi è stato affrontato il problema della stima blind dei parametri del segnale ricevuto in un canale di comunicazione Doppler adottando un approccio ciclostazionario. Nei capitoli precedenti sono stati presentati algoritmi di stima che si basano sia sul modello a banda stretta che sul modello a banda larga per il segnale ricevuto. Lo scenario considerato è quello del singolo utente: un solo utente trasmette un segnale che viene corrotto mentre viaggia nel canale di comunicazione Doppler dovuto al moto relativo fra trasmettitore e ricevitore. In uno scenario multiutente il canale di comunicazione viene utilizzato contemporaneamente da N utenti; il segnale ricevuto è costituito dalla somma di N segnali che sono una versione ritardata, attenuata, traslata in frequenza ed in fase e scalata temporalmente dei segnali trasmessi. Il problema della stima dei parametri del segnale consiste nella stima delle ampiezze, delle fasi, dei ritardi, dei Doppler shift e dei fattori di scala presenti nel segnale ricevuto.

Un algoritmo blind nel caso multiutente può essere ricavato considerando i risultati descritti nel Capitolo 5 nel caso di modello a banda larga. Il modello di segnale adottato per il segnale ricevuto è

$$r(t) = \sum_{m=1}^M A_m e^{j\varphi_m} x_m(s_m t - d_m) e^{j2\pi\nu_m t} + n(t) \quad (7.1)$$

dove i segnali $x_i(t)$ con $i = 1, \dots, M$ sono statisticamente indipendenti

l'uno dall'altro e dal segnale di disturbo $n(t)$. I parametri A_m , d_m , φ_m , ν_m , s_m , con $i = 1, \dots, M$, sono reali.

L'autocorrelazione ciclica del segnale ricevuto è

$$R_{rr^*}^\alpha(\tau) = \sum_{m=1}^M A_m^2 e^{j2\pi\nu_m\tau} R_{x_m x_m^*}^{\alpha/s_m}(s_m\tau) e^{-j2\pi\alpha d_m/s_m} + R_{nn^*}^\alpha(\tau) \quad (7.2)$$

e l'autocorrelazione ciclica coniugata è

$$R_{rr}^\beta(\tau) = \sum_{m=1}^M A_m^2 e^{j2\pi\nu_m\tau} R_{x_m x_m}^{(\beta-2\nu_m)/s_m}(s_m\tau) e^{-j2\pi(\beta-2\nu_m)d_m/s_m} + R_{nn}^\beta(\tau) \quad (7.3)$$

Dalle equazioni (7.2) e (7.3) si deduce che i fattori di scala ed i Doppler shift alterano le frequenze di ciclo e le frequenze di ciclo coniugate dei segnali trasmessi. Nell'ipotesi in cui α_0 e β_0 sono una frequenza di ciclo ed una frequenza di ciclo coniugata condivisa da tutti i segnali $x_i(t)$ si considerino le funzioni

$$H_{rr}(\beta) = \int_{\mathbb{R}} |R_{rr}^\beta(\tau)|^2 d\tau \quad (7.4)$$

$$Z_{rr^*}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} |R_{rr^*}^\alpha(\tau)|^2 d\tau. \quad (7.5)$$

Siano α_i con $i = 1, \dots, M$ gli M picchi della funzione (7.5). Si avranno M candidati per le stime dei fattori di scala

$$\hat{s}_i = \alpha_i / \alpha_0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (7.6)$$

Siano β_j con $j = 1, \dots, M$ gli M picchi della funzione (7.4). Si avranno M^2 candidati per le stime dei Doppler shift

$$\hat{\nu}_{ij} = \frac{\beta_j - \hat{s}_i \beta_0}{2}, \quad i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, M. \quad (7.7)$$

Si consideri la seguente funzione:

$$h_{ij}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} |\hat{R}_{rr^*}^{\hat{s}_i \alpha_0}(\tau) - \sum_{m=1}^M \gamma_m R_{x_m x_m^*}^{\alpha_0}(\hat{s}_i \tau) e^{j2\pi \hat{\nu}_{ij} \tau}|^2 d\tau. \quad (7.8)$$

con $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_M]^T$. Se si definisce

$$\gamma_{ij}^{\text{opt}} \triangleq \arg \min_{\gamma} h_{ij}(\gamma). \quad (7.9)$$

si dimostra che

$$\gamma_{ij}^{\text{opt}} = \mathbf{S}_{ij}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{ij} \quad (7.10)$$

dove

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{R}_{rr}^{\widehat{s}_i \alpha_0}(\tau) \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}^*}^{\alpha_0}(\mathbf{s}_i \tau)^* e^{-j2\pi \widehat{\nu}_{ij} \tau} d\tau \quad (7.11)$$

e

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}^*}^{\alpha_0}(\mathbf{s}_i \tau)^* \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}^*}^{\alpha_0}(\mathbf{s}_i \tau)^T d\tau \quad (7.12)$$

dove

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}^*}^{\alpha_0}(\mathbf{s}_i \tau) \triangleq \left[R_{x_1 x_1^*}^{\alpha_0}(\widehat{s}_1 \tau), \dots, R_{x_M x_M^*}^{\alpha_0}(\widehat{s}_M \tau) \right]^T \quad (7.13)$$

Si costruisce la matrice Γ costituita da M righe e M^2 colonne

$$\Gamma \triangleq \left[\gamma_{11}^{\text{opt}}, \dots, \gamma_{M1}^{\text{opt}}, \gamma_{12}^{\text{opt}}, \dots, \gamma_{M2}^{\text{opt}}, \dots, \gamma_{MM}^{\text{opt}} \right]. \quad (7.14)$$

Ad ogni colonna della matrice Γ è associata una delle possibili M^2 coppie delle stime dei parametri (s_i, ν_j) ; in particolare, al vettore γ_{ij}^{opt} corrisponde la coppia $(\widehat{s}_i, \widehat{\nu}_{ij})$. Per ogni riga della matrice Γ , corrispondente ad un segnale, individuando il massimo, è possibile associare una coppia $(\widehat{s}_i, \widehat{\nu}_{ij})$, fra le M^2 possibili, delle stime dei parametri del segnale x_m . Dopo questa associazione fra le M^2 coppie saranno considerate solo P coppie ribattezzate $(\widehat{s}_p, \widehat{\nu}_p)$ con $p = 1, \dots, P$ e $P \leq M$ e degli M^2 vettori γ^{opt} saranno considerati solo i vettori γ_p^{opt} con $p = 1, \dots, P$. Se si considera

$$g_p(\boldsymbol{\gamma}') = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{R}_{rr}^{\widehat{s}_p \beta_0 + 2\widehat{\nu}_p}(\tau) - \sum_{m=1}^M \gamma'_{pm} R_{x_m x_m}^{\beta_0}(\widehat{s}_p \tau)|^2 d\tau \quad p = 1, \dots, P \text{ e } P \leq M \quad (7.15)$$

con $\boldsymbol{\gamma}'_p = [\gamma'_{p1}, \dots, \gamma'_{pM}]^T$ e si definisce

$$\boldsymbol{\gamma}_p'^{\text{opt}} \triangleq \arg \min_{\boldsymbol{\gamma}'} g_p(\boldsymbol{\gamma}') \quad (7.16)$$

si dimostra che

$$\boldsymbol{\gamma}_p'^{\text{opt}} = \mathbf{S}_p'^{-1} \boldsymbol{\rho}'_p \quad (7.17)$$

dove

$$\boldsymbol{\rho}'_p = \int_{\mathbb{R}} \widehat{R}_{rr}^{\widehat{s}_p \beta_0 + 2\widehat{\nu}_p}(\tau) \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^{\beta_0}(\mathbf{s}_p \tau)^* e^{-j2\pi \widehat{\nu}_p \tau} d\tau \quad (7.18)$$

e

$$\mathbf{S}'_p = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{\beta_0}(\hat{s}_p\tau)^* \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{\beta_0}(\hat{s}_p\tau)^T d\tau \quad (7.19)$$

Le stime di ampiezza, ritardo e fase sono date da:

$$\begin{aligned} \hat{A}_m &= \frac{1}{2} \left[(\gamma'_{pm})^{1/2} + (\gamma_{pm}^{\text{opt}})^{1/2} \right] \\ \hat{d}_m &= -\frac{\arg[\gamma_{pm}^{\text{opt}}]}{2\pi\alpha_0} \\ \hat{\varphi}_m &= \frac{1}{2} \arg \left[\frac{\gamma'_{pm}}{\gamma_{pm}^{\text{opt}}} e^{j2\pi(\beta_0 - \alpha_0)\hat{d}_m} \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Nel caso di segnalazione multiutente circolare un algoritmo di stima può essere ricavato dai risultati descritti nel Capitolo 6, utilizzando le proprietà di ciclostazionarietà di ordine superiore al secondo.

Bibliografia

- [1] A. S. Besicotovich, "Almost Periodic Functions", Cambridge University Press, London 1932.
- [2] D. H. Brandwood, "A complex gradient operator and its application in adaptive array theory," *IEE Proc. Part F and H*, vol. 130, pp. 11-16, February 1983.
- [3] P.Ciblat, P.Loubaton, E.Serpedin, G.B.Giannakis, "Performance of blind carrier offset estimators for non circular transmissions through frequency-selective channels", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.50, January 2002.
- [4] V. De Angelis, L.Izzo, A. Napolitano and M. Tanda, "Performance analysis of a conjugate-cyclic-autocorrelation-projection-based algorithm for signal parameter estimation", *Proc. of Sixth International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC'03)*, Yosuka, Kanagawa, Japan, October 19-22 2003.
- [5] V. De Angelis, L.Izzo, A. Napolitano and M. Tanda, "Cyclostationarity-Based Parameter Estimation of Wide-Band signal in mobile communications", *Proc. of IEEE Workshop Statistical Signal Processing (SSP05)*, Bordeaux, July 17-20 2005.
- [6] V. De Angelis, L.Izzo, A. Napolitano and M. Tanda, "A Conjugate-Cyclic-Autocorrelation Projection-Based Algorithm for Signal Parameter Estimation", submitted to *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*.
- [7] J. V. Di Franco, W. L. Rubin, "Radar detection", Prentice-Hall, 1968.

- [8] L.E. Franks, “Carrier and bit Synchronization in data communication- A tutorial Review”, IEEE Transactions on Communications, Vol.COM.8NO.8, August 1980.
- [9] W.A Gardner, “Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic theory ”, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, NJ, USA, 1988.
- [10] W.A Gardner, “Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals”, IEEE Signal Processing Magazine 8, 1991.
- [11] W.A Gardner, “An introduction to cyclostationary signals”, in W.A Gardner (Ed.), Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, IEEE Press, New York, 1994, capitolo 1.
- [12] W.A Gardner, W.A. Brown, “Fraction-of-time probability for time-series that exhibit cyclostationarity”, Signal Processing 23, 1991.
- [13] W.A. Gardner, C.M. Spooner “The cumulant theory of cyclostationary time-series, Part I: Foundation”, IEEE Transactions on Signal Processing 42, 1994
- [14] F.Gini and G.B. Giannakis, “Frequency offset and symbol timing recovery in flat-fading channels: a cyclostationary approach”, IEEE Transactions on Communications, vol.46, March 1998.
- [15] E.J. Kelly, D.P. Wishner, “Matched filter theory for high-velocity, accelerating targets”, IEEE Trans. Military Electron., MIL-9, 1965.
- [16] L.Izzo, A.Napolitano, “Higher-order cyclostationarity properties of sampled time-series”, Signal Processing 54, 1996.
- [17] L.Izzo, A.Napolitano, “The higher-order theory of generalized almost-cyclostationary time-series”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.46, November 1998.
- [18] L.Izzo, A.Napolitano, “Linear time-variant transformations of generalized almost-cyclostationary signals, Part I: Theory and method-”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.50, December 2002.
- [19] L.Izzo, A.Napolitano, “Linear time-variant transformations of generalized almost-cyclostationary signals, Part II: Development and

- applications”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.50, December 2002.
- [20] L.Izzo, A.Napolitano, “Sampling of generalized almost-cyclostationary signals, Part II: Development and applications ”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.51, June 2003.
 - [21] Q. Jin, K. M. Wong, and Z.-Q. Luo, “The estimation of time delay and Doppler stretch of wideband signals,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol.43, April 1995.
 - [22] A.Napolitano, “Cyclic higher-order statistics: Input/output relations for discrete- and continuous- time MIMO linear almost-periodically time-variant systems”, Signal Processing 42,1995.
 - [23] A.Napolitano, “Mean-square consistency of statistical-fuction estimators for generalized almost-cyclostationary processes ”, in Proc. of XII European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2004), Vienna, Austria, September 2004.
 - [24] A.Napolitano and C.M. Spooner, “Median-based cyclic polyspectrum estimation ”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.48, May 2000.
 - [25] A.Napolitano and M.Tanda, “Blind estimation of amplitudes, phases, time delays and frequency shifts in multiuser communication systems”, in Proc. of IEEE Vehicular Technology Conference (VTC) 2000-Spring, Tokyo, Japan, May 2000.
 - [26] A.Napolitano and M.Tanda, “Blind parameter estimation in multiple access systems”, IEEE Transacions on Communications, vol.49, April 2001.
 - [27] A.Napolitano and M.Tanda, “A non-data-aided-cyclic-autocorrelation-based algorithm for signal parameter estimation”, in Proc. of Fourth International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC’01), Aalborg, Denmark, September 2001.
 - [28] A.Napolitano and M.Tanda, “Performance analysis of a Doppler-channel blind identification algorithm for non circular transmissions in multiple access systems”, in Proc. of Seventh IEEE International

- Symposium on Signal Processing and its applications (ISSPA 2003), Paris, France, July 1-4, 2003.
- [29] A.Napolitano and M.Tanda, "Doppler channel blind identification for non circular transmissions in multiple access systems", IEEE Transactions on Communications, vol.52, December 2004.
 - [30] C. Neipp, A. Hernández, J.J. Rodes , A. Márquez, T. Beléndez , A. Beléndez, "An analysis of the classical Doppler effect", European Journal of Physics, 2003, vol. 24, no. 5.
 - [31] J. Oberg, "Titan calling", IEEE Spectrum, vol. 41, pp. 28-33, October 2004
 - [32] B.Picinbono, "On Circularity",IEEE Transactions on Signal Processing,vol. 42, NO.12, December 1994.
 - [33] J.G. Proakis, "Digital Communications, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York,1995.
 - [34] R.A.Scholtz and J.-Y. Lee, "Problems in modeling UWB channels," in Proc.of Thirty-Sixth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA, 3-6 November 2002.
 - [35] D.A.Straight, G.K.Lot and W.A.Brown,"Maximum likelihood estimates of time and frequency difference of arrival of weak cyclostationary digital communications signals", in Proc. of 21st Century Military Communications Conference (MILCOM 2000), 2000.
 - [36] C.M. Spooner, W.A. Gardner" The cumulant theory of cyclostationary tiem-series, Part II: Development ans Applications", IEEE Transactions on Signal Processing 42, 1994
 - [37] H. V. Poor and M. Tanda, "Multiuser detection in flat fading non-Gaussian channels", IEEE Transctions on Communications, vol.50, November 2002.
 - [38] H.L. Van Trees, Detection, "Estimation, and Modulation Theory", Part III, John Wiley Sons, Inc., New York, 1971.